Доказательство теоремы о среднем значении с использованием пакета MathCAD

Ю. Н. Кондратьев[1]
В. М. Костюкевич
Петрозаводский государственный университет

АННОТАЦИЯ
Развитие средств вычислительной техники и программного обеспечения предъявляет высокие требования к современному выпускнику вуза в области решения любых инженерных задач эффективными методами, реализуемыми в пакетах прикладных программ. В качестве примера в статье приводится доказательство теоремы Коши с использованием пакета прикладных программ для инженерных расчетов MathCAD.

Ключевые слова: *теорема Коши, MathCAD, решающие блоки.*

SUMMARY
The article is devoted to application modern software for computer engineering MathCAD for proving of Koshi theorem.

Keywords: *Koshi theorem, MathCAD, solving blocks.*

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Известно, что обобщенная теорема о среднем значении (Коши) [1, с. 334] имеет следующую формулировку:

производные $f'(t)$ и $\varphi'(t)$ двух функций $f(t)$ и $\varphi(t)$, дифференцируемых в замкнутом промежутке (a, b), не обращаются одновременно в нуль нигде внутри этого промежутка.

Пусть при этом одна из функций $f(t)$, $\varphi(t)$ имеет неравные значения на концах интервала [например, $\varphi(a) \neq \varphi(b)$]. Тогда приращения $f(b)-f(a)$ и $\varphi(b)-\varphi(a)$ данных функций относятся как их производные в некоторой точке $t = \tau$, лежащие внутри промежутка (a, b), т.е.:

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(\tau)}{\varphi'(\tau)} \qquad (1)$$

РЕШЕНИЕ

Возьмем пример из литературных источников[1, с. 335]. Рассмотрим функции $f(t) = t^3$ и $\varphi(t) = t^2$ в промежутке от 0 до 2. На конце $t = 0$ производные $f'(t) = 3t^2$ и $\varphi'(t) = 2t$ обращаются в нуль, но внутри промежутка обе отличаются от нуля. При этом каждая из функций $f(t)$, $\varphi(t)$ имеет неравные значения на концах $t = 0$ и $t = 2$. Условия теоремы Коши выполнены. Значит отношение

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f(2)-f(0)}{\varphi(2)-\varphi(0)} = \frac{2^3}{2^2} = 2$$

должно равняться отношению

$$\frac{f'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3}{2}t$$

в некоторой точке $i = \xi$, лежащей между $a = 0$ и $b = 2$.

Действительно, уравнение $\frac{3}{2}t = 2$ имеет корень $t = \frac{4}{3}$, лежащий внутри промежутка (0, 2).

Рассмотрим решение вышеприведенного примера [1] на компьютере в системе MathCAD с использованием решающих блоков [2].

Зададим границы интервала

n1 = 0.001 – значение левой границы интервала;

n1 = 2 – значение правой границы интервала;

x – переменная;

x:= n1,0.2..n2 – ранжированная переменная с шагом 0.2;

$f1(x) := x^3$ – первая функция;

$f2(x) := x^2$ – вторая функция;

$p1(x) := \frac{d}{d(x)} f1(x)$ – первая производная первой функции;

$p2(x) := \frac{d}{d(x)} f2(x)$ – первая производная второй функции.

Построим графики функций и их производных (см. рис. 1):

[1] *Авторы – доценты кафедры технологии металлов и ремонта*

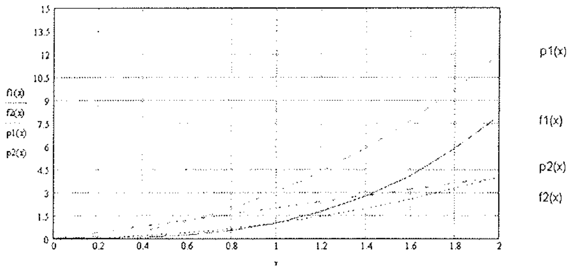

Рис. 1. Графики функций первой и второй производной

Зададим пошаговые значения функций и их производных:

x	f1(x)	p1(x)	f2(x)	p2(x)
0.001	10^{-9}	$3*10^{-6}$	10^{-6}	$2*10^{-30.4}$
0.2	0.008	0.12	0.04	0.4
0.399	0.064	0.478	0.159	0.798
0.598	0.214	1.073	0.358	1.196
0.797	0.506	1.906	0.635	1.594
0.996	0.988	2.976	0.992	1.992
1.195	1.706	4.284	1.428	2.39
1.394	2.709	5.83	1.943	2.788
1.593	4.042	7.613	2.538	3.186
1.792	5.755	9.634	3.211	3.584
1.991	7.892	11.892	3.964	3.982

Определим значение переменной x, которая удовлетворяет условию (1) с использованием решающих блоков [2].

Запишем ключевое слово решающего блока:

Given.

Запишем условие (1):

$$\frac{\mathrm{f1(n2)} - \mathrm{f1(n1)}}{f2(\mathrm{n1}) - f2(\mathrm{n1})} = \frac{p1(x)}{p2(x)}.$$

Найдем значение переменной x:

Find(x) = 1.333

Или $1.333 = \frac{4}{3}$, что соответствует решению примера [1].

ВЫВОДЫ

Как видно из приведенного выше доказательства теоремы о среднем значении (Коши), в пакете прикладных программ MathCAD для инженерных расчетов благодаря простоте и удобству все более широкое применение находят численные методы расчета, реализованные в программном обеспечении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Выгодский Л. В. Справочник по высшей математике / Л. В. Выгодский. М.: Наука, 1977. 871 с.
2. Аладьев В. З. Вычислительные задачи на персональном компьютере. (MathCAD) / В. З. Аладьев. Киев, 1991. 245 с.