Оценка среднего числа отказов и вероятности их появления для восстанавливаемых объектов на основе закона распределения наработки до первого отказа

А. В. Питухин[1]
Н. И.Серебрянский
В. Н. Шиловский
Петрозаводский государственный университет

АННОТАЦИЯ
В статье излагается методика оценки среднего числа отказов и вероятности их появления для восстанавливаемых объектов в условиях реальной эксплуатации. В ее основу положен вероятностный закон распределения наработки до первого отказа, полученного при проведении испытаний по определению показателей безотказности, а также распределение Пуассона.

Ключевые слова: *объект, показатели безотказности, наработка на отказ, закон распределения.*

SUMMARY
In the paper the technique of estimation of the mean number of failures and probability of their appearance for restorable item in conditions of substantial exploitation is set up. It is based on the distribution law of operating time till the first failure obtained while carrying out tests for the definition of the item reliability as well as on Poisson distribution.

Keywords: *item, failure, reliability measure, mean operating time between failure, distribution law.*

Определение показателей безотказности объектов при проведении испытаний в условиях исследовательских лабораторий чаще всего основано на использовании планов эксперимента типа [NUN] и [NUT]. Согласно плану [NUN] контролируется N объектов, после возникновения отказа объект снимается с наблюдения и в дальнейших испытаниях не участвует, испытания заканчивают при отказе всех N объектов [1]. Испытания по плану [NUT] отличаются только условием их прекращения. При этом испытания заканчивают по истечении наработки T [1].

По результатам этих испытаний получают оценки таких показателей безотказности, как средняя наработка до первого отказа, вероятность безотказной работы, гамма-процентная наработка до отказа, интенсивность отказов и др. Кроме того, имеется возможность оценить и закон распределения наработки до первого отказа.

В условиях же реальной эксплуатации объект, после его отказа, восстанавливается или заменяется новым. В нашем случае и рассматривается эксплуатация восстанавливаемых объектов, в которых возникшие отказы устраняются, объект возвращается в систему эксплуатации и в дальнейшем является опять носителем отказов. При этом вероятность появления отказа в будущем зависит от наличия их в прошлом, то есть отказ рассматривается как зависимое событие.

Определим для восстанавливаемых объектов среднее число отказов и вероятность их появления на некотором периоде эксплуатации по имеющемуся закону распределения наработок до первого отказа, полученному путем обработки результатов испытаний на надежность по планам [NUN] или [NUT].

Для решения поставленной задачи рассматриваемый период эксплуатации разбиваем на интервалы и принимаем допущение, что в пределах интервала вероятность отказа постоянна и все отказавшие объекты восстанавливаются одновременно в конце интервала.

Введем следующие обозначения:

N – количество объектов в эксплуатации;

Z_i – среднее число отказов на i-м интервале или, что то же самое, среднее количество восстановленных (замененных) объектов на i-м интервале;

q_i – вероятность появления отказа объекта на i-м интервале с учетом наличия отказов и восстановлений (замен) на предыдущих интервалах;

ω_i – вероятность отказа единичного трактора на конец i-го интервала, определенная без учета восстановлений, т.е. с использованием планов [NUN] или [NUT].

На первом интервале работают только незамененные объекты с вероятностью отказа ω_1. Следовательно, $q_1 = \omega_1$ и $Z_1 = Nq_1$.

На втором интервале работают объекты, еще не замененные (их количество равно $N - Z_1$) с вероятностью отказа ω_2 и замененные на первом интервале с вероятностью их отказа на втором интервале ω_1. Тогда количество отказов на втором интервале определится по формуле

$$Z_2 = (N - Z_1)\,\omega_2 + Z_1\omega_1 .$$

После преобразований получим

$$Z_2 = N(\omega_2 - \omega_1\omega_2 + \omega_1\omega_1),$$

$$q_2 = \omega_2 - \omega_1\omega_2 + \omega_1\omega_1 .$$

---

[1] *Авторы – соответственно заведующий и доценты кафедры технологии металлов и ремонта*

На третьем интервале работают объекты, не замененные (их количество $N - Z_1 - Z_2$) с вероятностью отказа ω_3, замененные на втором интервале с вероятностью отказа их на первом интервале и с вероятностью отказа их на третьем интервале ω_2.

Очевидно,

$$Z_3 = (N - Z_1 - Z_2)\omega_3 + Z_2\omega_1 + Z_1\omega_2$$

$$q_3 = \frac{Z_3}{N} = \omega_3 - \omega_1\omega_3 - \omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_2\omega_3 - $$

$$- \omega_1^2\omega_3 + \omega_1^2\omega_2 + \omega_1^3 + \omega_1\omega_2.$$

Произведя обобщение, получим формулу для оценивания среднего числа отказов на интервале n с учетом наличия отказов и замен на предыдущих интервалах:

$$Z_n = \left(N - \sum_{i=1}^{n-1} Z_i \right)\omega_n + \sum_{i=1}^{n-1} Z_{n-i}\,\omega_i. \quad (1)$$

Соответственно вероятность появления отказа на интервале n:

$$q_n = \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} q_i \right)\omega_n + \sum_{i=1}^{n-1} q_{n-1}\,\omega_i. \quad (2)$$

Теоретические вероятности отказа в зависимостях (1) и (2) определяются по имеющемуся закону распределения наработки до первого отказа $f(t)$, полученному путем обработки результатов испытаний на надежность с использованием планов [NUN] и [NUT]:

$$\omega_i = \int_0^{t_i} f(t)dt, \quad (3)$$

где t_{i-1}, t_i – границы i-го интервала.

Если мы разбиваем период эксплуатации на равные интервалы величиной K, то для определения ω_i можно использовать приближенную формулу трапеций

$$\omega_i \approx \frac{R}{2}\sum_{j=0}^{i}[f(t_j) + f(t_{j-1})]. \quad (4)$$

Естественно, при $i = 1$ полагаем $t_0 = 0$.

По значениям Z_n определяем среднее число отказов $M_n^{(N)}$ при эксплуатации N объектов на первых n интервалах, т.е. на исследуемом периоде

$$M_n^{(N)} = \sum_{K=1}^{n} Z_K, \quad (5)$$

или, используя зависимость (1),

$$M_n^{(N)} = \sum_{K=1}^{n}\left[\left(N - \sum_{i=1}^{K-1} Z_i \right)\omega_k + \sum_{i=1}^{K-1} Z_{K-i}\,\omega_i\right].$$

Следует отметить, что формула (2) дает значение вероятности появления на интервале n только одного отказа. Вероятность появления на интервале n некоторого количества отказов m при эксплуатации N объектов обозначим $P_n^{(N)}(m)$. Принимая во внимание принятое допущение, что в пределах интервала вероятность отказа постоянна и все отказавшие объекты восстанавливаются одновременно в конце интервала (т.е. в течение интервала замен не производится), значение $P_n(m)$ можно определить по формуле биномиального закона распределения [2]:

$$P_n^{(N)}(m) = \frac{N!}{m!(N-m)!} q_n^m (1 - q_n)^{N-m}. \quad (6)$$

Положив в зависимости (6) $m = 0$, получим известную формулу для оценивания вероятности безотказной работы N объектов, имеющих последовательное соединение (в смысле надежности):

$$P_n^{(N)}(0) = (1 - q_n)^N.$$

Это вероятность того, что в течение интервала n ни один из N эксплуатируемых объектов не откажет.

Очевидно, что в силу принятого допущения зависимость (6) дает приближенную оценку вероятности появления m отказов на интервале n при эксплуатации N объектов. Действительно, на интервале n при достаточно высокой вероятности отказа q_n при реальной эксплуатации может иметь место и несколько отказов. Мы же принимаем допущение об отсутствии замен на интервале, т.е. что более одного отказа на интервале не происходит. Оценивание вероятности $P_n^{(N)}(m)$ по формуле (6) тем точнее, чем меньше вероятность одного отказа q_n.

В связи с вышеизложенным возникает задача оценки вероятности возникновения K отказов единичного объекта на интервале n. Используем для этого известное распределение Пуассона [2]:

$$P(K,t) = \frac{[\lambda(t)t]^K}{K!} e^{-\lambda(t)t}, \quad (7)$$

где $P(K,t)$ – вероятность появления K отказов объекта за наработку от 0 до t;

$\lambda(t)$ – интенсивность отказов.

Интенсивность отказов связана с вероятностью отказа p на интервале $(t, t+dt)$ зависимостью

$$P(t) = \lambda(t)dt.$$

Таким образом, можно считать, что интенсивность отказов в законе Пуассона есть не что иное, как вероятность отказа в единицу наработки.

Полагаем в пределах каждого интервала n интенсивность отказов постоянной и равной λ. Считаем, что в начале интервала при $t = 0$ число отказов объекта $K = 0$. Вероятность отказа в конце интервала при $t = R$ полагаем равной q_n.

Тогда $\lambda(t)t = \lambda R = q_n$ и, используя распределение Пуассона (7), определим вероятность появления K отказов объекта на интервале n:

$$P_n^{(1)}(K) = \frac{q_n^K}{K!} \cdot e^{-q_n}. \qquad (8)$$

В частном случае при $K = 1$:

$$P_n^{(1)}(1) = q_n \cdot e^{-q_n}.$$

Но $P_n^{(1)}(1)$ есть по смыслу не что иное, как q_n. Поэтому необходимым условием применимости распределения Пуассона и, следовательно, формулы (8) является достаточно малое значение вероятности отказа q_n.

Действительно, при $q_n \to 0 \quad e^{-q_n} \to 1$.

Таким образом, и формулу (6) и формулу (8) можно использовать только при малых значениях вероятности отказа объекта q_n.

Распределение Пуассона широко используется в теории надежности для моделирования (описания) процесса потока возникновения отказов [2]. В этом случае полагаем, что при $t = 0$ число отказов объекта с начала эксплуатации $K(t)$ равно нулю:

$$K(0) = 0.$$

Полагаем, что длительность процесса восстановления мала по сравнению с длительностью процесса безотказного функционирования и что отказы независимы друг от друга и вероятность их достаточно мала. Полагаем также постоянство интенсивности отказов λ. В этом случае поток отказов носит стационарный характер и вероятность возникновения от начала эксплуатации до момента t определенного количества отказов $K(t)$ определится по формуле

$$P^{(1)}(K,t) = \frac{(\lambda t)}{K!} \cdot e^{-\lambda t}. \qquad (9)$$

Параметр λ в этом случае имеет смысл среднего числа отказов в единицу наработки и определяется на основании обработки планов [NUN] или [NUT] как величина, обратная оценке средней наработки до первого отказа. В силу предположения о независимости отказов и стационарности потока отказов оценки наработки до первого отказа и наработки на отказ будут совпадать.

Общее число отказов объекта за наработку от 0 до t определится соотношением

$$M^{(1)}(t) = \sum_{K=1}^{\infty} K\, P^{(1)}(K,t). \qquad (10)$$

Учитывая зависимость (9) и ограничивая верхний предел суммирования числом L, равным ближайшему целому числу от $3\lambda t$, получим

$$M^{(1)}(t) = \sum_{K=1}^{L} \frac{(\lambda t)^K}{(K-1)!} \cdot e^{-\lambda t}. \qquad (11)$$

Среднее число отказов $M^{(N)}(t)$ при эксплуатации N объектов на интервале $[0,t)$ определится по формуле

$$M^{(N)}(t) = N \sum_{K=1}^{L} \frac{(\lambda t)^K}{(K-1)!} \cdot e^{-\lambda t}. \qquad (12)$$

Представляет интерес сравнить результаты, полученные по формулам (5) и (12), что в дальнейшем и будет сделано.

ЛИТЕРАТУРА

1. ГОСТ 27.002–89. Надежность в технике. Основные понятия. Термины и определения. М.: Изд-во стандартов, 1990. 38 с.
2. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для втузов. 5-е изд., перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1977. 479 с.