Минимизация радиальных размеров планетарного механизма

П. Г. Яковлев[1]
Петрозаводский государственный университет

АННОТАЦИЯ
В статье приведены результаты теоретических исследований по синтезу планетарного механизма с одновременной минимизацией его размеров.

Ключевые слова: *передаточное отношение, планетарный механизм, минимальные размеры.*

SUMMARY
In this article are expounded results of theoretical research synthesis of planetary mechanism with minimization of its dimensions.

Keywords: *gear ratio, planetary mechanism, minimization of dimensions.*

Автором предложен метод [3] синтеза плоских планетарных передач, который в отличие от других методов, например, метода сомножителей [2], позволяет представить для заданной схемы планетарного механизма и заданного передаточного отношения все теоретически возможные решения в виде диаграмм. В работе [4] была предпринята попытка проанализировать получающиеся по предложенному методу диаграммы теоретически возможных решений для механизма с двухвенцовыми сателлитами с одним внешним и одним внутренним зацеплениями. В предлагаемой статье приведены результаты дальнейших исследований по синтезу такого механизма с целью минимизации его размеров. Приведены полученные в результате анализа формулы, позволяющие сразу синтезировать по заданному передаточному отношению механизм минимальных радиальных размеров без рассмотрения каких-либо вариантов.

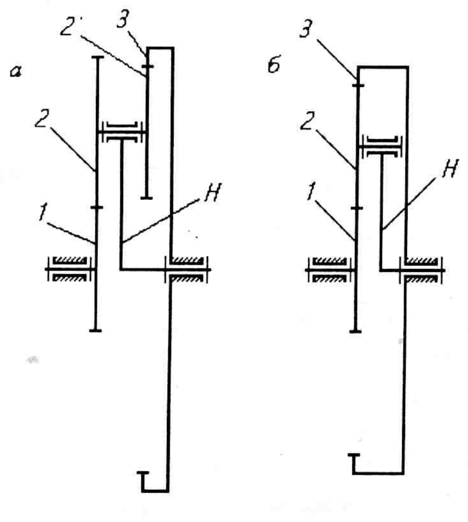

Рис. 1.

На рис. 1*а* показана схема рассматриваемого механизма. Введем обозначения:

$z_1, z_2, z_{2'}$ и z_3 - числа зубьев колес механизма;

$u_{1H}^{(3)}$ - заданное передаточное отношение от колеса 1 к водилу *H*. Для рассматриваемого механизма $u_{1H}^{(3)} = 1 + z_2 z_3 / z_1 z_{2'} > 1$;

$x_3 = z_1/z_3$ - коэффициент, который может изменяться в пределах $0 < x_3 < 1$;

p - произвольный положительный множитель.

Тогда по методике, изложенной в [3, 4], можно определить, что для воспроизведения заданного передаточного отношения $u_{1H}^{(3)}$ при условии соосности водила *H* и центральных колес 1 и 3, числа зубьев колес при одинаковом их модуле определяются по формулам:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= [1-(1-u_{1H}^{(3)})x_3]x_3 p,\\
z_2 &= (1-u_{1H}^{(3)})(x_3-1)x_3 p,\\
z_{2'} &= (1-x_3)p, \qquad (1)\\
z_3 &= [1-(1-u_{1H}^{(3)})x_3]p,
\end{aligned}
$$

где $0 < x_3 < 1$.

Имеется бесконечное множество решений. Однако, приняв, например, $p = 1$, все решения для заданного $u_{1H}^{(3)}$ можно представить в виде диаграмм $z = z(x_3)$. Анализ таких диаграмм [4] показывает, что механизм имеет минимальные размеры при $z_1 = z_{2'}$, а коэффициент x_3 при этом принимает значение x_{3b}. Это значение x_{3b} определяется по следующей формуле:

$$x_{3b} = \frac{\sqrt{u_{1H}^{(3)}} - 1}{u_{1H}^{(3)} - 1}. \qquad (2)$$

Формула (2) имеет физический смысл только для положительных значений $\sqrt{u_{1H}^{(3)}}$.

---

[1] *Автор – доцент кафедры технологии и оборудования лесного комплекса*

Существуют два промежутка $u_{1H}^{(3)}$, в которых числа зубьев колес *механизма минимальных размеров* удобно определять, применяя различную методику. Это промежутки $1 < u_{1H}^{(3)} \le 4$ и $u_{1H}^{(3)} \ge 4$.

Рассмотрим промежуток $1 < u_{1H}^{(3)} \le 4$. В этом промежутке [4] в *механизме минимальных размеров* между числами зубьев колес соблюдается соотношение $z_2 < z_1 = z_{2'} < z_3$. При $u_{1H}^{(3)} = 4$ это соотношение выглядит иначе, а именно так: $z_2 = z_1 = z_{2'} < z_3$. Но и в том, и в другом случае справедливым будет утверждение, что в *механизме минимальных размеров* в промежутке передаточных отношений $1 < u_{1H}^{(3)} \le 4$ наименьшее число зубьев имеет колесо 2. Если числа зубьев всех зубчатых колёс механизма разделить или умножить на одно и то же число, то воспроизводимое передаточное отношение и условие соосности не нарушатся. На основании этого разделим все числа зубьев колес, определяемые по формулам (1), на их число на наименьшем колесе 2, или, говоря другими словами, разделим правые части формул (1) на выражение $(1 - u_{1H}^{(3)})(x_3 - 1)x_3$. Затем умножим полученные результаты на допустимое минимальное число зубьев $z_{\min}$, а вместо x_3 подставим его значение x_{3b}, выраженное через $u_{1H}^{(3)}$ из формулы (2). После преобразований получим формулы для определения чисел зубьев искомого механизма, имеющего минимальные размеры для промежутка передаточных отношений $1 < u_{1H}^{(3)} \le 4$:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= z_{2'} = \frac{z_{\min} p}{\sqrt{u_{1H}^{(3)}} - 1},\\
z_2 &= z_{\min} p, \\
z_3 &= \frac{(\sqrt{u_{1H}^{(3)}} + 1) z_{\min} p}{\sqrt{u_{1H}^{(3)}} - 1}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Радиальные размеры механизма определяются или числом зубьев z_3 на центральном колесе 3, если $z_3 > z_1 + 2z_2$, или числом зубьев $z_1 + 2z_2$, если $z_3 < z_1 + 2z_2$. В рассматриваемом промежутке $1 < u_{1H}^{(3)} < 4$ оказывается, что $z_3 > z_1 + 2z_2$, т.е. радиальные размеры механизма определяются числом зубьев на центральном колесе 3.

При $u_{1H}^{(3)} = 4$ $z_1 = z_2 = z_{2'}$, а $z_3 = 3z_1 = 3z_2 = 3z_{2'}$. Один из венцов сателлита становится ненужным. Механизм превращается в планетарный механизм с одновенцовым сателлитом с одним внешним и одним внутренним зацеплениями (рис. 1*б*).

Рассмотрим теперь промежуток $u_{1H}^{(3)} \ge 4$. В промежутке $u_{1H}^{(3)} > 4$ соотношение чисел зубьев колес в *механизме минимальных размеров* [4] имеет вид: $z_1 = z_{2'} < z_2 < z_3$, а при $u_{1H}^{(3)} = 4$ это соотношение оказывается другим: $z_1 = z_2 = z_{2'} < z_3$. Как при $u_{1H}^{(3)} > 4$, так и при $u_{1H}^{(3)} = 4$, справедливым будет утверждение, что в *механизме минимальных размеров* для передаточных отношений $u_{1H}^{(3)} \ge 4$ минимальное число зубьев имеет колесо 1. Если числа зубьев всех зубчатых колёс механизма разделить или умножить на одно и то же число, то воспроизводимое передаточное отношение и условие соосности не нарушатся. На основании этого числа зубьев колес, определяемые по формулам (1), разделим на их число на наименьшем колесе 1, или, иначе говоря, разделим левые части формул (1) на выражение $[1 - (1 - u_{1H}^{(3)})x_3]x_3$. Затем умножим полученные результаты на допустимое минимальное число зубьев $z_{\min}$, а вместо x_3 подставим его значение x_{3b}, выраженное через $u_{1H}^{(3)}$ из формулы (2). После преобразований получим формулы для определения чисел зубьев искомого механизма, имеющего *минимальные размеры*, для промежутка передаточных отношений $u_{1H}^{(3)} \ge 4$:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= z_{2'} = z_{\min} p, \\
z_2 &= (\sqrt{u_{1H}^{(3)}} - 1) z_{\min} p, \\
z_3 &= (\sqrt{u_{1H}^{(3)}} + 1) z_{\min} p.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

В промежутке $u_{1H}^{(3)} \ge 4$ в *механизме минимальных размеров* имеет место соотношение чисел зубьев $z_1 + 2z_2 > z_3$. То есть радиальные размеры механизма здесь определяются числом зубьев колеса 1 плюс удвоенное число зубьев венца 2 сателлита. Для случая $u_{1H}^{(3)} = 4$ определенные по формулам (3) числа зубьев колес и венцов сателлитов получаются такими же, как и в случае определения их по формулам (4), т.е. $z_1 = z_2 = z_{2'}$. Механизм при $u_{1H}^{(3)} = 4$, как это уже отмечалось выше, превращается в механизм с одновенцовым сателлитом (рис. 1*б*), в котором $z_1 + 2z_2 = z_3$.

При определении чисел зубьев колес по формулам (3) и (4) рекомендуется принимать $p = 1$. Анализ формул (3) и (4) показывает, что при $p = 1$ в механизме минимальных размеров определяемые по этим формулам значения z_1, z_2, $z_{2'}$ и z_3 будут получаться целочисленными только в случае, если $\sqrt{u_{1H}^{(3)}}$ есть рациональное число. При этом принятое целочисленное $z_{\min}$ без остатка делится на знаменатель правильной простой несмешанной и несократимой дроби, в виде которой представляется рациональное число $\sqrt{u_{1H}^{(3)}}$. В этом случае механизм минимальных размеров будет точно воспроизводить заданное передаточное отношение $u_{1H}^{(3)}$.

Во всех других случаях, как правило, при подборе зубьев по заданному $1 < u_{1H}^{(3)} < 4$ по формулам (3) при $p = 1$ и принятом целочисленном $z_{\min}$ значения чисел зубьев $z_1 = z_{2'}$ и z_3 получаются дробными. То же нужно сказать и о подборе чисел зубьев по заданному $u_{1H}^{(3)} > 4$ по формулам (4). Только здесь дробными оказываются z_2 и z_3. Дробные числа зубьев следует округлять до целых. Получающийся после такого округления чисел зубьев механизм воспроизводит заданное передаточное отношение $u_{1H}^{(3)}$ с некоторой погрешностью, которая, как правило, не превышает допустимую. Если после округления происходит незначительное нарушение соосности, т.е. $z_3 - z_{2'} - z_2 - z_1$ оказывается не равным нулю, а равным ± 1, то несоосность рекомендуется устранять соответствующим подбором величины произвольного множителя p. Для этого следует вернуться к неокругленным числам зубьев, полученным при $p = 1$, и для них подобрать такую величину произвольного множителя p, при которой после округлений чисел зубьев до целых условие соосности будет соблюдаться.

При назначении числа зубьев на наименьшем колесе нужно принимать во внимание требование отсутствия интерференции зубьев. Известно, что для колес, нарезанных стандартным реечным инструментом без смещения при внешнем их зацеплении, интерференция будет отсутствовать, если на меньшем колесе число зубьев будет не менее 17. В случае внутреннего нулевого эвольвентного зацепления во избежание интерференции следует руководствоваться таблицей 1 [1]. В этой таблице число зубьев колеса с внешними зубьями обозначено $z_{вш}$, а число зубьев колеса с внутренними зубьями $z_{вн}$. Руководствуясь изложенным, при определении чисел зубьев по формулам (3) и (4) нужно назначать $z_{\min} \geq 17$ и именно такое, чтобы при его минимально возможном значении соблюдалось требование, указанное в таблице 1. Однако проще при назначении $z_{\min} \geq 17$ пользоваться рассчитанной автором таблицей 2.

В случае назначения $z_{\min}$ по рекомендациям таблицы 2 в механизме минимальных размеров с зубчатыми колесами, изготовленными без смещения режущего инструмента, будет отсутствовать интерференция, как во внутреннем, так и во внешнем зацеплении. Из таблицы 2 видно, что, в зависимости от заданного передаточного отношения, $z_{\min}$ при условии отсутствия интерференции, как во внешнем, так и во внутреннем зацеплении колес, нарезанных без смещения режущего инструмента, колеблется в пределах 17-21. Из таблицы 2 также видно, что если принять $z_{\min} = 21$, то интерференции не будет во всех случаях $u_{1H}^{(3)} > 1$, но все механизмы, за исключением механизмов, осуществляющих передаточные отношения в промежутке $3{,}96 \leq u_{1H}^{(3)} \leq 4{,}10$, окажутся несколько завышенными в своих радиальных размерах по сравнению с минимально возможными. Может оказаться, что нужное число сателлитов из условия сборки [5] и соседства [2] установить в полученном механизме окажется невозможным. В этом случае необходимо, увеличивая $z_{\min}$, синтезировать по формулам, приведенным в таблице 2, механизм, в котором нужное количество сателлитов будет собираться.

Таблица 1

$z_{вш}$	$z_{вн}$
17	∞
18	>144
19	>81
20	>60
21	>50
22	>44
23	>41
24	>38
25	>36
26	>35
27 - 79	$> z_{вш}+8$
80 и выше	$z_{вш}+7$

На рис. 2 приведена диаграмма чисел зубьев *механизмов минимальных размеров*, рассчитанных по формулам (3) и (4). При расчетах $u_{1H}^{(3)}$ изменялось от 1,5 до 30 через равные интервалы 0,5. На колесе минимальных размеров число зубьев $z_{\min}$ выбиралось минимально возможным, согласно таблице 2. Вычисления проводились с помощью табличного процессора **Microsoft Excel**. Для всех расчетных передаточных отношений, за исключением $u_{1H}^{(3)} = 1{,}5$, $u_{1H}^{(3)} = 2{,}5$ и $u_{1H}^{(3)} = 3{,}5$, после округления полученных чисел зубьев до целых условия соосности соблюдались при $p = 1$. Для случаев $u_{1H}^{(3)} = 1{,}5$, $u_{1H}^{(3)} = 2{,}5$ и $u_{1H}^{(3)} = 3{,}5$ для соблюдения соосности в расчетах пришлось принять соответственно $p = 1{,}005$, $p = 0{,}99$ и $p = 1{,}01$, а после этого произвести округление чисел зубьев до целых. Подбор p для этих трех случаев осуществлялся с помощью простейшей функции **Подбор параметра** табличного процессора **Microsoft Excel.**

значений $u_{1H}^{(3)} < 1{,}5$ не построена. При $u_{1H}^{(3)} > 4$ радиальный размер механизма, определяемый числом зубьев $z_1 + 2z_2 > z_3$, растет медленнее. Так, $z_1 + 2z_2$ достигает значения 169 только при $u_{1H}^{(3)} = 24{,}5$.

Диаграмма (см. рис. 2) может быть использована для предварительной прикидки размеров проектируемого механизма. Пусть, например, требуется определить, какие передаточные отношения можно осуществить рассматриваемым механизмом, чтобы диаметр его по начальным окружностям не превышал $100\ m$, где m – модуль зацепления. Это требование означает, что при $u_{1H}^{(3)} < 4$ $z_3 \le 100$ и $z_1 + 2z_2 \le 100$. Из диаграммы (см. рис. 2) видно (см. точки A и B), что в этом случае промежуток передаточных отношений $u_{1H}^{(3)}$ находится в пределах от 2 до 9

Таблица 2

Воспроизводимое передаточное отношение $u_{1H}^{(3)}$	Наименьшее число зубьев $z_{\min}$ на самом меньшем зубчатом колесе из условия отсутствия интерференции как во внутреннем, так и во внешнем зацеплении	Формулы для определения числа зубьев колес
От 1 до 3,5	≥17	$z_1 = z_{2'} = \dfrac{z_{\min} p}{\sqrt{u_{1H}^{(3)}} - 1}$, $z_2 = z_{\min} p$, $z_3 = \dfrac{(\sqrt{u_{1H}^{(3)}} + 1) z_{\min} p}{\sqrt{u_{1H}^{(3)}} - 1}$.
От 3,6 до 3,56	≥18	
От 3,57 до 3,71	≥19	
От 3,72 до 3,95	≥20	
От 3,96 до 4	≥21	
От 4 до 4,10	≥21	$z_1 = z_{2'} = z_{\min} p$, $z_2 = (\sqrt{u_{1H}^{(3)}} - 1) z_{\min} p$, $z_3 = (\sqrt{u_{1H}^{(3)}} + 1) z_{\min} p$.
От 4,11 до 10,82	≥20	
От 10,83 до 49,38	≥19	
От 49,39 и выше	≥18	

Из диаграммы (рис. 2) видно, что в промежутке передаточных отношений $1 < u_{1H}^{(3)} \le 4$ с уменьшением $u_{1H}^{(3)}$ радиальный размер механизма, определяемый этом случае числом зубьев z_3 на колесе 3 быстро растет. Так, при $u_{1H}^{(3)} = 4$ $z_3 = 63$, а при $u_{1H}^{(3)} = 1{,}5$ $z_3 = 169$. В связи с дальнейшим быстрым ростом z_3 при уменьшении $u_{1H}^{(3)}$ диаграмма для

При округления чисел зубьев до целых происходит некоторое изменение заданного передаточного отношения $u_{1H}^{(3)}$.. Воспроизводимое передаточное отношение и заданное передаточное, подсчитанное для тех же значений $u_{1H}^{(3)}$, что и на диаграмме рис. 2, показаны на диаграмме рис. 3. На этом же рисунке показаны в % погрешности воспроизведения полученными механизмами передаточных отношений по сравнению с заданными. Из диаграммы видно, что

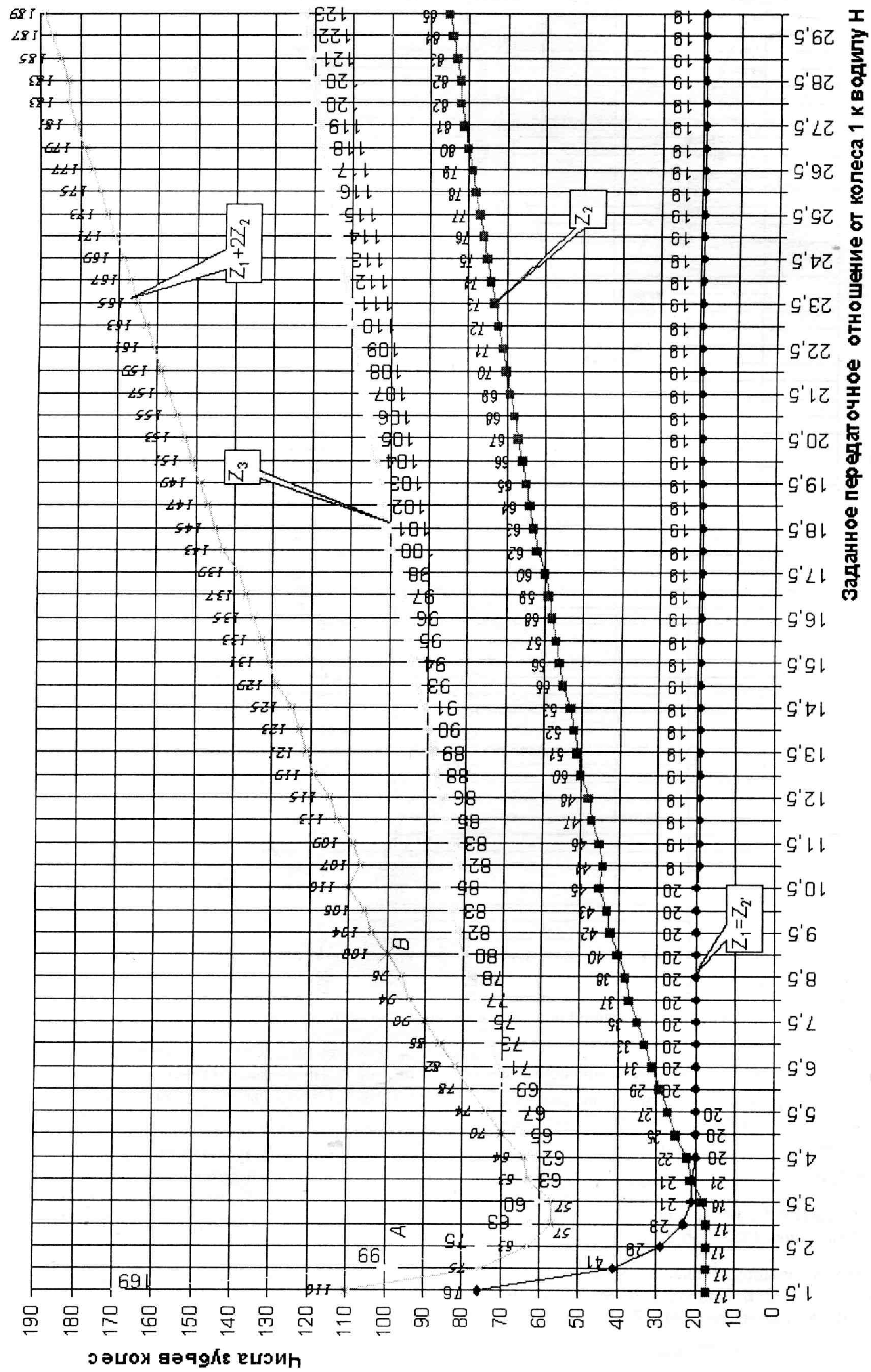
Заданное передаточное отношение от колеса 1 к водилу Н
Числа зубьев колес
Z_1+2Z_2
Z_2
Z_3
$Z_1=Z_{2'}$
A
B

Рис. 2.

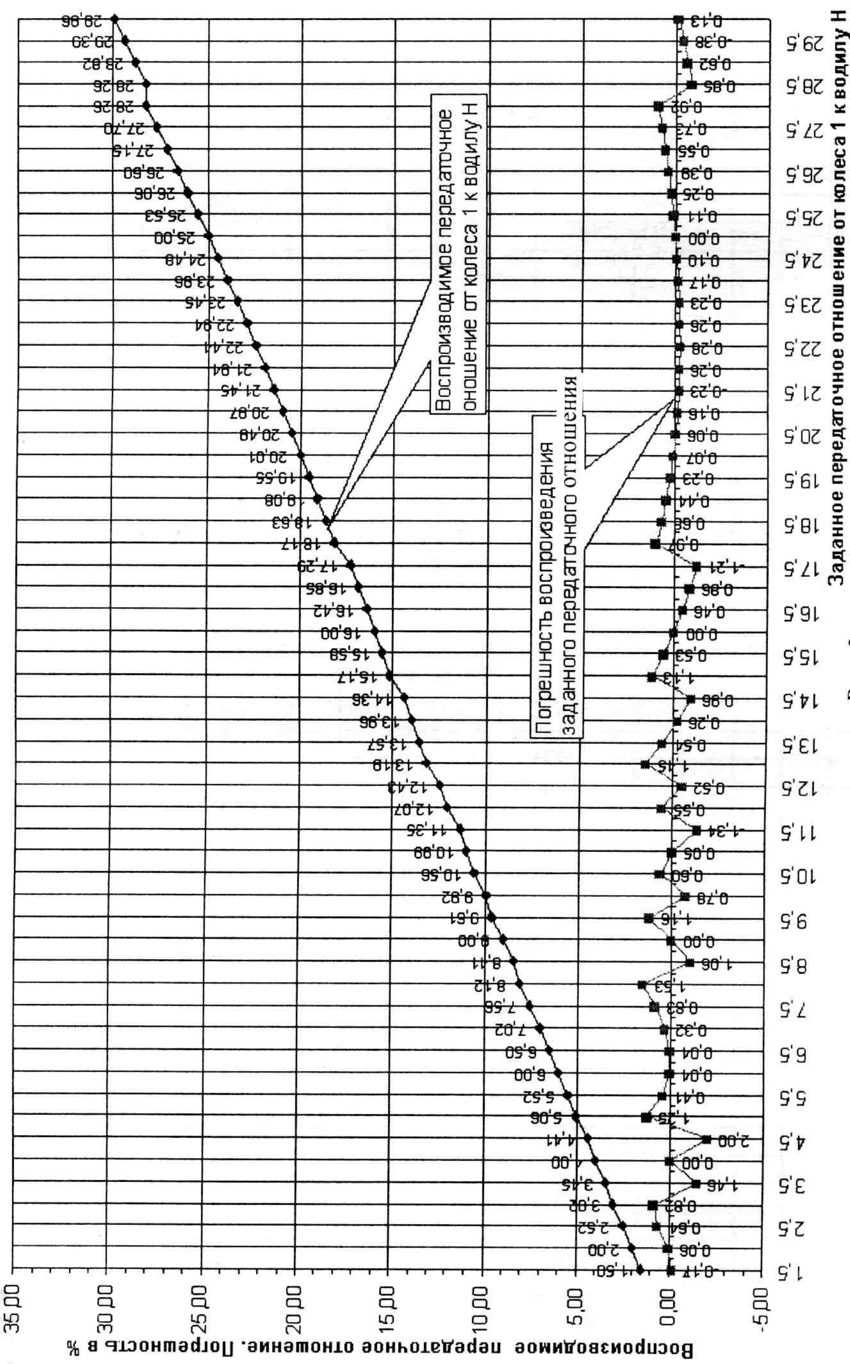

Рис. 3.

только при $u_{1H}^{(3)} = 4{,}5$ погрешность воспроизведения заданного передаточного отношения оказалась равной –2 %. В остальных случаях эта погрешность ни где не превышает 2 % по модулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Артоболевский С. И. Теория механизмов и машин. М.: Высш. шк., 1967. 256 с.

2. Теория механизмов: Учебное пособие для втузов / В. А. Гавриленко, С. Б. Минут, А. К. Мусатов и др.; Под ред. В. А. Гавриленко. М.: Высш. шк., 1974. 511с.: ил.

3. Яковлев П. Г. Синтез плоских планетарных механизмов // Труды лесоинженерного факультета ПетрГУ. Вып. 1 Петрозаводск, 1966. С. 126-129.

4. Яковлев П. Г. Определение области оптимальных размеров плоского зубчатого планетарного механизма с двухвенцовыми сателлитами, входящими в одно внешнее и одно внутреннее зацепление / Петрозаводский гос. ун-т. Петрозаводск, 1998. 30с. Деп. в ВИНИТИ № 949-В98.

5. Яковлев П. Г., Митрофанов Е. Г., Нефедов В. П. Определение числа блоков сателлитов из условия сборки // Сборник научно-методических статей по теории механизмов и машин. Вып. 7. М.: Высш. шк., 1978. С. 105-108