

Уточнение влияния периодического изменения приведенного момента инерции на угловое ускорение начального звена

Яковлев П.Г.¹
Нефёдов В.П.

Петрозаводский государственный университет

Рассмотрена методика графо-аналитического определения первой производной от приведенного момента инерции.

Ключевые слова: рычажный механизм, ускорение начального звена, аналоги скоростей и ускорений.

УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО ЗВЕНА В УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ

Известно, что в машинных агрегатах, имеющих в своем составе рычажный механизм, угловая скорость начального звена в установившемся режиме не может быть постоянной. Это происходит в силу того, что приведенный момент инерции периодически меняется. Кроме того, как правило, приведенный момент сил тоже не является постоянной величиной и тоже периодически меняется. Например, в кривошипно-ползунном механизме двухтактного двигателя внутреннего сгорания время одного цикла будет равно времени одного оборота кривошипа, в четырехтактном - времени двух оборотов кривошипа. В установившемся режиме циклы сколь угодно долго повторяются. Однако угловая скорость начального звена, оставаясь в среднем постоянной, в пределах каждого цикла определенным образом меняется. Отсюда следует, что начальное звено имеет меняющееся по величине и знаку ускорение.

Угловое ускорение ε начального звена может быть определено по формуле

$$\varepsilon = \frac{M_D - M_C}{J_{\Pi}} - \frac{\omega^2}{2J_{\Pi}} \cdot \frac{dJ_{\Pi}}{d\varphi}. \quad (1)$$

Здесь для рассматриваемого момента движения:

M_D - приведенный момент движущих сил;

M_C - приведенный момент сил сопротивления;

J_{Π} - приведенный момент инерции;

ω - угловая скорость начального звена;

φ - угол поворота начального звена (обобщенная координата).

Иногда в расчетах вторым членом в формуле (1) пренебрегают или определяют его графическим дифференцированием, точность которого невелика. Это

может быть оправдано для тихоходных механизмов. Но для быстроходных механизмов второй член формулы (1), пропорциональный ω^2 , может оказаться достаточно большим, и не учитывать его или определять с недостаточной точностью уже нельзя.

ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ $dJ_{\Pi}/d\varphi$

Известно, что

$$J_{\Pi} = \sum_{i=1}^n \left(J_{si} \frac{\omega_i^2}{\omega^2} + m_i \frac{v_{si}^2}{\omega^2} \right), \quad (2)$$

где

n - количество подвижных звеньев механизма;

J_{si} - момент инерции i -го звена относительно оси проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения;

ω_i - угловая скорость i -го звена;

m_i - масса i -го звена;

v_{si} - скорость центра масс i -го звена.

Поскольку $\omega_i = d\varphi_i/dt$ и $\omega = d\varphi/dt$, то $\omega_i/\omega = d\varphi_i/d\varphi = \varphi_i'$ есть аналог угловой скорости i -го звена. Далее, поскольку $\bar{v}_i = d\bar{s}_i/dt$, то $\bar{v}_{si}/\omega = d\bar{s}_i/d\varphi = \bar{s}_{si}'$ - аналог скорости центра масс i -го звена. С учетом сказанного формула (2) принимает вид

$$J_{\Pi} = \sum_{i=1}^n (J_{si} \varphi_i'^2 + m_i s_{si}'^2) \quad (3)$$

Теперь продифференцируем выражение (3) по обобщенной координате

$$\frac{dJ_{\Pi}}{d\varphi} = 2 \sum_{i=1}^n (J_{si} \varphi_i' \varphi_i'' + m_i s_{si}' s_{si}'' \cos \gamma_i). \quad (4)$$

Здесь

φ_i'' - аналог углового ускорения i -го звена;

s_{si}'' - величина вектора $\bar{s}_{si}'' = d\bar{s}_{si}'/d\varphi$ аналога ускорения центра масс i -го звена;

γ_i - угол между направлениями векторов \bar{s}_{si}' и \bar{s}_{si}'' .

Введем обозначение

$$A = \sum_{i=1}^n (J_{si} \varphi_i' \varphi_i'' + m_i s_{si}' s_{si}'' \cos \gamma_i) \quad (5)$$

Подставим (5) в (4), а затем полученный результат в формулу (1), после чего она принимает вид:

$$\varepsilon = \frac{M_D - M_C}{J_{\Pi}} - \omega^2 \frac{A}{J_{\Pi}} \quad (6)$$

¹ Авторы, соответственно, доцент, зав. кафедрой технологии и оборудования лесного комплекса © П.Г.Яковлев, В.П.Нефёдов, 1996

Коэффициент A является динамической характеристикой механизма и определяется только размерами его звеньев и распределением их масс и может быть представлен как периодическая функция обобщенной координаты $A = A(\varphi)$. Коэффициент A может определяться для каждого заданного значения обобщенной координаты как аналитически, так и графоаналитически.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ

Покажем на примере кривошипно-ползунного механизма достаточно простой и не трудоемкий графоаналитический метод. На рис. показаны: а) план кривошипно-ползунного механизма, б) план аналогов скоростей механизма, в) план аналогов ускорений механизма. Положительным направлением вращения принято вращение по часовой стрелке. Размерность масштабных коэффициентов μ_l , μ_s' и μ_s'' принята м/мм. Для определения J_{Π} этого механизма формула (2) принимает вид

$$J_{\Pi} = J_{S1} + m_1 l_{OS1}^2 + J_{S2} \varphi_2'^2 + m_2 s_2'^2 + m_3 s_B'^2.$$

Соответственно ей формула (6) для определения коэффициента A этого механизма получается такой:

$$A = J_{S2} \varphi_2'' + m_2 s_2 s_2'' \cos \gamma_2 + m_3 s_B s_B'' \cos \gamma_3. \quad (7)$$

Из планов аналогов скоростей и ускорений имеем

$$\varphi_2' = \frac{(ab)\mu_s'}{(AB)\mu_1}, \quad \varphi_2'' = \frac{(n_1 b)\mu_s''}{(AB)\mu_1}.$$

Теперь можно записать

$$\varphi_2' \varphi_2'' = - \frac{(ab)(n_1 b)\mu_s' \mu_s''}{(AB)^2 \mu_1^2}. \quad (8)$$

Вообще знак перед произведением $\varphi_2' \varphi_2''$ можно определять, не задумываясь о направлениях φ_2' и φ_2'' . Достаточно рассматривать параллельные отрезки $(\bar{a}b)$ и $(\bar{n}_1 b)$ как направленные. Если они оба направлены в одну сторону, то в правой части (8) ставится знак плюс, а если в разные - то минус. Заметим, что удобно построения на рис., проводить так, чтобы $\mu_1 = \mu_s' = \mu_s''$. Тогда расчеты по формуле (8) становятся совсем простыми, так как масштабные коэффициенты сокращаются.

Для вычисления произведения $s_2 s_2'' \cos \gamma_2$ через точку S_2 на плане скоростей проведем линию параллельно направлению вектора аналога ускорения центра масс шатуна (параллельно πs_2). На ее продолжение из полюса p опустим перпендикуляр pn_{S2} . Из чертежа (рис., а) видно, что

$$s_2' s_2'' \cos \gamma_2 = (ps_2) \cdot \mu_s' \cdot (\pi s_2) \cdot \mu_s'' \cdot \cos \gamma_2 = (pn_{S2}) \cdot (\pi s_2) \cdot \mu_s' \cdot \mu_s'' \quad (9)$$

Поскольку угол γ_2 оказался острым, то произведение $s_2' s_2'' \cos \gamma_2$ здесь положительно. Оно будет отрицательным, когда угол γ_2 окажется тупым. Однако и здесь при определении знака можно не обращать внимания на величину угла γ_2 , а руководствоваться следующим правилом. Если направленные отрезки \bar{pn}_{S2} и $\bar{\pi s_2}$ направлены одинаково, то ставится знак плюс, а если направлены в противоположные стороны, то знак минус.

Произведение $s_B' s_B'' \cos \gamma_3$ определяется по аналогии с предыдущим, а именно:

$$s_B' s_B'' \cos \gamma_3 = (pb) / (pb) m_s m_s'' \quad (10)$$

Здесь pn_{S3} совпадает с полюсом p , а $\bar{pn}_{S3} s_3 = \bar{pb}$ и $\bar{\pi s_3} = \bar{\pi b}$ казались направленными в одну сторону ($\gamma_3 = 0$), поэтому в правой части (10) стоит знак плюс.

Проделав действия, предусмотренные формулами (8), (9) и (10), и подставив полученные результаты в формулу (7), определим коэффициент A .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанный метод может быть распространен на любые плоские механизмы с одной степенью свободы. Если при кинематическом расчете механизма уже построены планы скоростей и ускорений, то очевидно, что при определении величины $dJ_{\Pi}/d\varphi$ описанный метод следует предпочесть как обеспечивающий высокую точность и меньшую трудоемкость по сравнению с построением диаграммы $J_{\Pi} = J_{\Pi}(\varphi)$ и ее последующим графическим дифференцированием, точность которого мала. Описанный метод может оказаться полезным и при аналитическом определении коэффициента A по формуле (5). Так как выражения $\varphi_i' = \varphi_i'(\varphi)$, $\varphi_i'' = \varphi_i''(\varphi)$ и $\bar{s}_{si}' = \bar{s}_{si}'(\varphi)$, $\bar{s}_{si}'' = \bar{s}_{si}''(\varphi)$ оказываются довольно сложными, то при отладке программ для расчета коэффициента на ЭВМ результаты расчетов по предлагаемой методике позволяют вести соответствующий контроль.

ЛИТЕРАТУРА

1. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин: Учеб. для вузов. - 4-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1988. 640 с.
2. Теория механизмов и машин: Учеб. для вузов / К.В.Фролов, С.А.Попов, А.К.Мусатов и др.; Под ред. К.В.Фролова. М.: Высш. шк., 1987. 496 с.: ил.

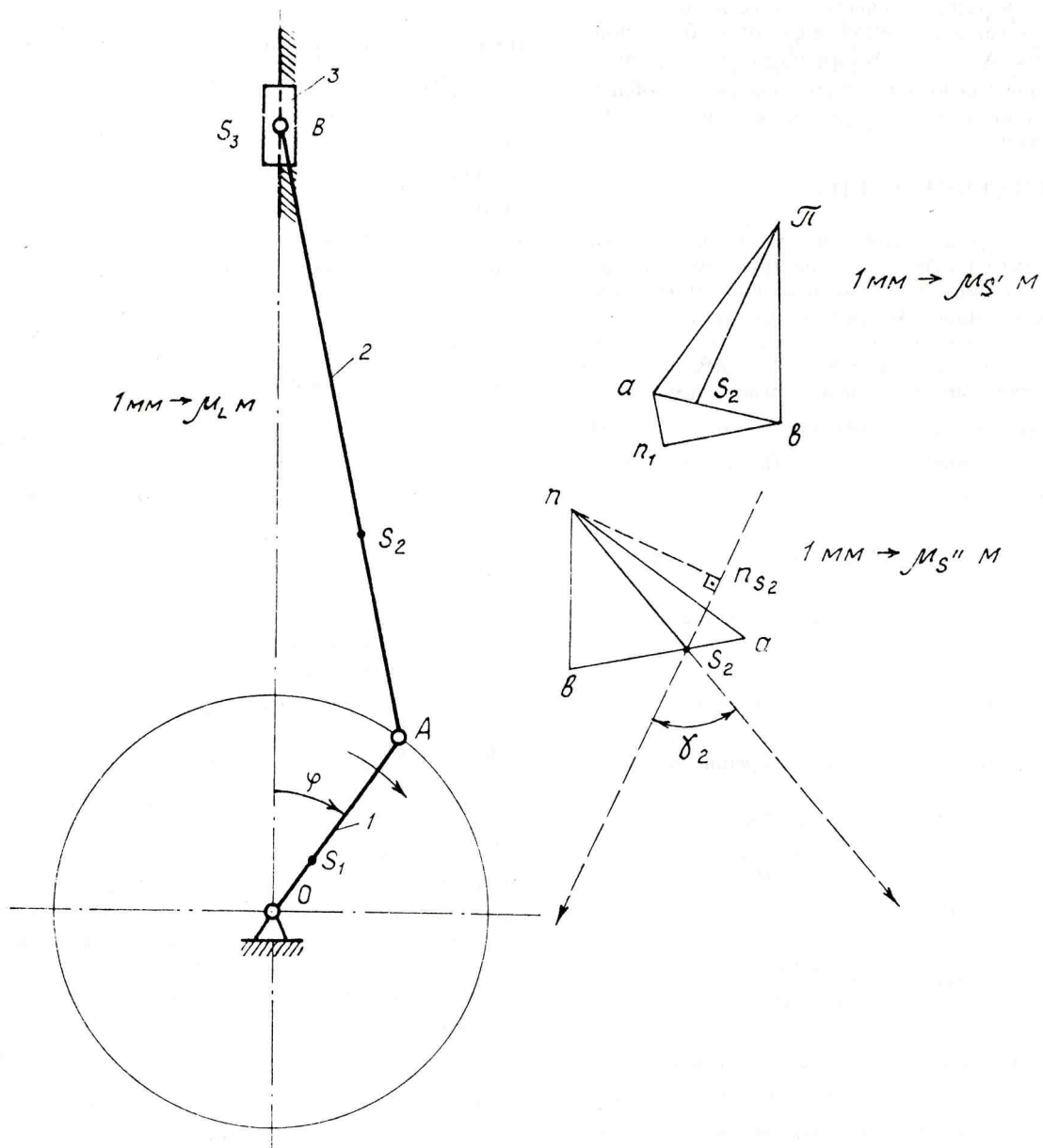


Рис. Расчетная схема