

DOI: 10.15393/j2.art.2020.5422

УДК 630.3

Обзор

## Математические модели взаимодействия движителей машин с грунтами

**Хитров Егор Германович**

*кандидат технических наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный лесотехнический университет им. С. М. Кирова (Российская Федерация), [yegorkhitrov@gmail.com](mailto:yegorkhitrov@gmail.com)*

**Андронов Александр Вячеславович**

*кандидат технических наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный лесотехнический университет им. С. М. Кирова (Российская Федерация), [andronovalexandr@gmail.com](mailto:andronovalexandr@gmail.com)*

**Хахина Анна Михайловна**

*доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (Российская Федерация), [anna-hahina@mail.ru](mailto:anna-hahina@mail.ru)*

**Григорьев Глеб Владимирович**

*кандидат технических наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный лесотехнический университет им. С. М. Кирова (Российская Федерация), [vtl-lta@mail.ru](mailto:vtl-lta@mail.ru)*

*Получена: 24 октября 2020 / Принята: 9 декабря 2020 / Опубликовано: 10 декабря 2020*

---

**Аннотация:** Предлагаемая статья представляет собой обзор и краткий анализ основных результатов, полученных отечественными и зарубежными исследователями в области изучения взаимодействия движителей колёсных и гусеничных машин с опорными поверхностями движения. Рассмотрены математические модели, предназначенные для расчёта показателей колееобразования и тягово-сцепных свойств движителей машин. Показано, что к настоящему времени научное описание процессов взаимодействия движителей машин с опорными поверхностями, лесными почвами и грунтами, необходимое для повышения технологической эффективности и снижения экологических рисков работы лесозаготовительной техники в сложных и особо сложных почвенно-грунтовых условиях, не завершено. Рассмотрены подходы к моделированию

взаимодействия движителей лесных и лесозаготовительных машин с однородными опорными поверхностями, свойства которых остаются неизменными в процессе взаимодействия с движителями; подходы, в основном, используют упругую постановку задачи о вдавлении штампа-деформатора в полупространство. Приведён обзор накопленных эмпирических сведений по взаимодействию движителей машин с отдельными типами почв и грунтов. Рассмотрены апробированные подходы к получению практических зависимостей для определения показателей колеобразования и уплотнения почвогрунтов, тягово-сцепных свойств движителей при работе на однородных опорных поверхностях с неизменными свойствами (подходы базируются на идее обработки результатов вычислительных экспериментов). Установлено, что сравнительно слабо проработаны вопросы оценки показателей взаимодействия движителей колёсных и гусеничных лесных машин с неоднородными опорными поверхностями (лесные почвогрунты и заболоченные грунты, вариативность свойств которых обусловлена слоистой структурой и неоднородностью плотности и влажности по глубине залегания слоёв), свойства которых могут изменяться непосредственно под воздействием движителя (например, снег, уплотнённый почвогрунт, почвогрунт лесосеки при многократном прохождении движителя по следу), при нелинейных взаимосвязях напряжения и деформации (возникающих при существенных деформациях опорной поверхности и вследствие реологических свойств почв и грунтов, динамических эффектов при воздействии на них движителей машин).

**Ключевые слова:** колеобразование, тягово-сцепные свойства, проходимость машин

---

DOI: 10.15393/j2.art.2020.5422

*Review*

## **Mathematical models of machine movers' interaction with soils**

**Egor Khitrov**

*Ph. D. in engineering, associate professor, St. Petersburg State Forest Technical University named after S. M. Kirov (Russian Federation), [yegorkhitrov@gmail.com](mailto:yegorkhitrov@gmail.com)*

**Aleksandr Andronov**

*Ph. D. in engineering, associate professor, St. Petersburg State Forest Technical University named after S. M. Kirov (Russian Federation), [andronovalexandr@gmail.com](mailto:andronovalexandr@gmail.com)*

**Anna Khakhina**

*D. Sc. in engineering, professor, St. Petersburg Polytechnic University of Peter the Great (Russian Federation), [anna-hahina@mail.ru](mailto:anna-hahina@mail.ru)*

**Gleb Grigorev**

*Ph. D. in engineering, associate professor, St. Petersburg State Forest Technical University named after S. M. Kirov (Russian Federation), [vtl-lta@mail.ru](mailto:vtl-lta@mail.ru)*

*Received: 24 October 2020 / Accepted: 9 December 2020 / Published: 10 December 2020*

---

**Abstract:** The paper focuses on a review and a brief analysis of the main results obtained by Russian and foreign researchers in the field of studying the interaction of wheeled and tracked vehicles with bearing surfaces. Mathematical models are considered for calculating the indicators of rutting and tractive performance of the vehicles. It is shown that to date, the scientific description of the processes of vehicles interaction with bearing surfaces, such as forest soils, which is necessary to improve technological efficiency and reduce the environmental risks of harvesting equipment in difficult soil conditions, has not been completed. The authors consider approaches to modeling the interaction of forestry vehicles with homogeneous bearing surfaces, the properties of which remain constant in the process of interaction. The approaches mainly use the elastic formulation of the problem of indentation when an indenter is pressed into a half-space. An overview of the accumulated empirical data on the interaction of the vehicles with certain types of soils and grounds is given. Approved approaches to obtaining dependencies for determining the indicators of rutting and compaction of soil, vehicles' tractive

performance when operating on homogeneous bearing surfaces with constant properties are considered (the approaches are based on the idea of processing the results of computational experiments). The authors have found that assessment of indicators of wheeled and tracked forest vehicles interaction with heterogeneous bearing surfaces is not sufficiently developed. The properties of such surfaces, which include forest soils and waterlogged soils, vary because of their layered structure and inhomogeneity of density and moisture in the depths of layers. These properties may change directly under the impact of a mover, for example, in case of snow, compacted soil, soil of a cutting area when a vehicle passes repeatedly along the track. This change occurs at nonlinear stress-strain relationship that arises because of rheological properties of soils and dynamic effects under a vehicle impact.

**Keywords:** rutting, tractive performance, cross-country ability of machines

---

## 1. Введение

Научные сведения по показателям взаимодействия техники с опорными поверхностями необходимы не только для синтеза эффективных, средоохраняющих технологических процессов лесосечных работ, но и для проектирования перспективных образцов колёсных и гусеничных машин, предназначенных для эксплуатации в сложных (лесные почвогрунты, значительно деформируемые движителями) и особо сложных (увлажнённые и переувлажнённые, заболоченные грунты и почвогрунты, глубокий снег) почвенно-грунтовых и рельефных условиях нашей страны, что особенно актуально в свете стратегии замещения импортной лесной техники отечественной.

В отечественной науке изучением взаимодействия движителей машин с опорными поверхностями, почвами и грунтами занимаются учёные в области сельского и лесного хозяйства, строительства, военного дела [1—67]. Сформировалась теория движения автомобильного транспорта в условиях бездорожья [1], [16], положения которой успешно применялись и используются при решении задач и проблем науки о лесозаготовительном производстве [4], [17—25], [41—43]. Основу теории составляют закономерности механики грунтов, механики контактного взаимодействия и механики деформируемого тела [3—5], [7], [10], [62], [63], [66], [67].

За рубежом также сформировалась отдельная отрасль исследований под названием *terramechanics* [44—60]. Отмечается, что под термином *terramechanics* следует понимать приложение механики грунтов к исследованию процессов взаимодействия движителей машин с опорными поверхностями движения. Основные результаты, полученные в указанной области, обобщены и проанализированы в работах [57], [61].

## 2. Материалы и методы

Предлагаемая статья представляет собой обзор и краткий анализ основных результатов, полученных отечественными и зарубежными исследователями в области изучения взаимодействия движителей колёсных и гусеничных машин с опорными поверхностями движения. Рассмотрены математические модели, предназначенные для расчёта показателей колеобразования и тягово-сцепных свойств движителей машин.

## 3. Результаты

### 3.1. Модели для расчёта осадки опорной поверхности и колеобразования

Известна функция Бернштейна (Бернштейна — Летошнева), связывающая давление плоского штампа на грунт и осадку грунта  $h$  [61]:

$$p = kh^n, \quad (1)$$

где  $p$  — нормальное давление на грунт,  $k$ ,  $n$  — параметры, зависящие от свойств грунта и воздействующего на него тела (движителя).

Свойства движителя и грунта учитываются параметрами  $k$ ,  $n$ . Учитывая многообразие почвенно-грунтовых условий, типов и характеристик движителей, для использования уравнения (1) в практической деятельности необходима обширная экспериментальная и эмпирическая база.

Впоследствии предложена модификация уравнения (1) для случая воздействия круглого штампа на грунт [61]:

$$p = k \left( \frac{h}{D} \right)^n, \quad (2)$$

где  $D$  — диаметр круглого штампа.

В работе [61] рассмотрена осадка грунта под воздействием прямоугольного штампа, функция давления от осадки получена в виде:

$$p = \left( \frac{k_c}{b} + k_\phi \right) h^n, \quad (3)$$

где  $b$  — ширина прямоугольного штампа,  $k_c$ ,  $k_\phi$  — параметры, зависящие от сцепных и фрикционных свойств грунта.

Были предложены вариации формулы (3) в работах [61], [62]:

$$p = (k_1 + k_2 b) \left( \frac{h}{b} \right)^n, \quad (4)$$

$$p = (Ck_c + \gamma k_\phi b) \left( \frac{h}{b} \right)^n, \quad (5)$$

$$p = (K_1 + \alpha b K_2) \beta^n \left( \frac{h}{b} \right)^n, \quad (6)$$

где  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  — параметры модели, зависящие от сдвиговых свойств грунта,  $\alpha$ ,  $\beta$  — безразмерные параметры,  $C$  — удельное сцепление грунта,  $\gamma$  — удельный вес грунта.

По сравнению с уравнением (1) объём эмпирической базы, необходимой для моделирования осадки движителя на практике, сократился (за счёт введения в уравнения ширины штампа  $b$  и разделения параметра  $k$  на составляющие, характеризующие сцепление и внутреннее трение частиц грунта). Накоплены сведения по значениям параметров  $n$ ,  $k_c$ ,  $k_\phi$  для некоторых типов опорных поверхностей, но база данных остаётся фрагментарной. Кроме того, уравнения (3)—(6) не учитывают влияние касательного напряжения на развитие осадки штампа.

Далее были разработаны уточнённые формулы, более полно учитывающие геометрические параметры пятна контакта колёсного движителя с опорной поверхностью. Для распределения давления по пятну контакта колеса с грунтом предложена функция [62], [63]:

$$p(\theta) = \begin{cases} (k_1 + k_2 b) \left(\frac{r}{b}\right)^n (\cos \theta - \cos \theta_1)^n, & \theta_M \leq \theta < \theta_1 \\ (k_1 + k_2 b) \left(\frac{r}{b}\right)^n \left\{ \cos \left[ \theta_1 - \left(\frac{\theta - \theta_2}{\theta_M - \theta_2}\right) (\theta_1 - \theta_M) \right] - \cos \theta_1 \right\}^n, & \theta_2 \leq \theta < \theta_M \end{cases}, \quad (7)$$

где  $\theta_1$  — угол между центральной осью колеса и точкой начала пятна контакта колеса с опорной поверхностью,  $\theta_2$  — угол между центральной осью колеса и точкой конца пятна контакта колеса с опорной поверхностью,  $\theta_M$  — угол между центральной осью колеса и точкой, соответствующей максимальной радиальной деформации колеса,  $r$  — радиус колеса.

Получено уравнение, учитывающее диаметр колеса [64]:

$$p = \hat{k} \hat{h}^{\hat{n}} D^{\hat{m}}, \quad (8)$$

где  $\hat{k}, \hat{h}, \hat{m}$  — параметры модели,  $D$  — диаметр колеса, которое впоследствии было модифицировано [61]:

$$p = \hat{k} \hat{h}^{\hat{n}} (bl)^{\hat{m}}, \quad (9)$$

где  $l$  — длина пятна контакта [61]:

$$l = \sqrt{Dz_0 - z_0^2}, \quad (10)$$

где  $z_0$  — максимальная радиальная деформация колеса.

В уравнениях (1)–(10) давление  $p$  является степенной функцией осадки  $z$ . Известны экспоненциальные функции давления; например, С. С. Корчуновым предложена формула [292]:

$$p = p_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h}{k_0}\right) \right], \quad (11)$$

где  $k_0$  — параметр грунта,  $p_0$  — несущая способность [61]:

$$p_0 = A_0 + B_0 \frac{M}{F}, \quad (12)$$

где  $A_0, B_0$  — параметры грунта,  $M$  — периметр прямоугольного штампа, моделирующего движитель,  $F$  — площадь пятна контакта.

Уравнение (10) имеет модификацию, предложенную для случая взаимодействия гусеничного движителя с глинистым грунтом [65]:

$$p = 8,28C \left[ 1 - \exp\left(-\frac{Kh}{b}\right) \right], \quad (13)$$

где  $K$  — параметр грунта.

Была предложена ещё одна экспоненциальная функция [61]:

$$p = p_0 \frac{1 - \exp\left(-\frac{2k_v h}{p_0}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{2k_v h}{p_0}\right)}, \quad (14)$$

где  $k_v$  — коэффициент объёмного сжатия грунта.

Уравнения (11)—(14) включают эмпирические параметры, методика определения которых не была стандартизована, по их значениям не сформирована справочная база.

В работе [66] рассмотрены различные стадии деформирования грунта под воздействием круглого плоского штампа, включая упругую стадию и стадию пластического течения, в результате предложено комбинированное уравнение, сочетающее в себе линейную и экспоненциальную функции осадки:

$$p = \left( \frac{C_m}{B_m} + \frac{s_m}{B^{1-m}} h \right) \left( 1 - \exp\left\{ -\frac{s_0}{C_m} \frac{h}{B^{1-m}} \right\} \right), \quad (15)$$

где  $B$  — диаметр круглого штампа,  $C_m$ ,  $s_0$ ,  $s_m$ ,  $m$  — параметры модели.

Известно комбинированное уравнение, полученное на основе уравнения (3) [67]:

$$p = K_S h \lambda_N, \quad (16)$$

где  $K_S$  — параметр грунта,  $\lambda_N$  — функция, зависящая от параметров деформатора-движителя.

Структура безразмерной функции  $\lambda_N$  зависит от состояния грунта. Например, для грунтов с параметром  $n$  по уравнению (3) свыше 0,3 функция  $\lambda_N$  задаётся формулой [63]:

$$\lambda_N = \left( \frac{h}{h_0} \right)^{n_0 - 1 + n_1 \frac{h}{z_0}}, \quad (17)$$

где  $h_0 = 1$  м,  $n_0$ ,  $n_1$  — параметры, зависящие от характеристик движителя.

Для грунтов в пластической фазе деформирования при параметре  $n$  до 0,3 функция  $\lambda_N$  задаётся формулой [63]:

$$\lambda_N = \frac{1}{n_0 + n_1 \frac{h}{h_0} + n_2 \left( \frac{h}{h_0} \right)^2}, \quad (18)$$

где  $n_0$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  — параметры, зависящие от характеристик движителя.

При нагрузках до 300 Н функция  $\lambda_N$  задаётся формулой [63]:

$$\lambda_N = \left( \frac{h}{h_0} \right)^{n_0 - 1 + n_1 r}, \quad (19)$$

где  $r$  — радиус круглого штампа, равновеликого по площади пятну контакта ( $25 \text{ мм} < r < 50 \text{ мм}$ ).



При нагрузках до 7000 Н функция  $\lambda_N$  задаётся формулой [63]:

$$\lambda_N = \left( \frac{h}{h_0} \right)^{n_0 - 1 + n_1 r + n_2 r^2}, \quad (20)$$

где  $r$  — радиус круглого штампа, равновеликого по площади пятну контакта ( $25,4 \text{ мм} < r < 152,4 \text{ мм}$ ).

Для более общего случая, при произвольном  $r$ , функция  $\lambda_N$  имеет вид [63]:

$$\lambda_N = \left( \frac{h}{h_0} \right)^{n_0 - 1 + n_1 W + n_2 W^2}, \quad (21)$$

где  $W$  — нормальная нагрузка на штамп.

Если выразить  $W$  в уравнении (21) через  $p$  и  $r$ , в конечном итоге будет получена функция  $\lambda_N$  от  $p$  и  $r$  [270]:

$$\lambda_N = f(p, r). \quad (22)$$

Теми же авторами разработана математическая модель, учитывающая поворот движителя, вызывающий увеличение осадки [67]:

$$p = \left( \frac{k_c}{b} + k_\varphi \right) h^{N_s(\theta_s, W)}, \quad (23)$$

где  $N_s$  — функция, учитывающая угол поворота [67]:

$$N_s(\theta_s, W) = n_0 + n_1 \theta_s^{\alpha_1 + \beta_1 W}, \quad (24)$$

где  $\theta_s$  — угол поворота движителя,  $n_0, n_1, \alpha_1, \beta_1$  — параметры модели.

Уравнения (1)—(24) получены для однородных грунтов, следовательно, не предназначены для моделирования осадки при работе на слоистых опорных поверхностях, например, на слабонесущих органических грунтах, задернованный слой которых расположен на болотистом основании. Для случаев, когда более прочный слой опорной поверхности лежит на слабом основании, предложена формула [63]:

$$p = k_p h + \frac{4m_m h^2}{D_h}, \quad (25)$$

$$D_h = \frac{4F}{M}, \quad (26)$$

где  $k_p$  — параметр жёсткости нижнего слоя,  $m_m$  — параметр прочности верхнего слоя.

Кроме того, в механике оснований и фундаментов известно соотношение [26]:

$$h = T p \sqrt{F}, \quad (27)$$

где  $T$  — параметр грунта.

Результаты расчёта по уравнению (27) согласуются с экспериментальными данными по осадке движителя только для несвязных грунтов (пески).

Уравнения (1)—(27) носят эмпирический характер [61].

В работе [27] на основе формулы Бернштейна — Летошнева (1) развита методология оценки колееобразования и уплотнения лесных почвогрунтов, в т. ч. при циклическом воздействии движителя. Рассмотрим подробнее вывод полуэмпирических зависимостей, используемых при расчёте осадки лесных грунтов под воздействием движителей лесных машин. В качестве характеристики деформативности почвогрунта используется модуль общей деформации, представляющий собой экспериментальную величину [27]:

$$E_0 = \frac{\omega b(p_2 - p_1)(1 - \nu^2)}{h_2 - h_1}, \quad (28)$$

где  $\omega$  — параметр штампа,  $h_2$  и  $h_1$  — осадки штампа, соответствующие давлениям  $p_2$  и  $p_1$ ,  $\nu$  — коэффициент Пуассона грунта.

В работе [27] учитывается время воздействия движителя на грунт. Для этого грунт рассматривается как упруго-вязкое тело Максвелла, общая относительная деформация которого складывается из двух составляющих:

$$\varepsilon = \varepsilon_E + \varepsilon_\eta, \quad (29)$$

где  $\varepsilon_E$  — мгновенная составляющая общей относительной деформации сжатия (упругая составляющая),  $\varepsilon_\eta$  — длительная составляющая общей относительной деформации сжатия (вязкая составляющая).

Для расчёта мгновенной относительной деформации используется формула [27]:

$$\varepsilon_E = \frac{p}{E_0}. \quad (30)$$

Длительную вязкую составляющую относительной деформации рассчитывают по формуле [27]:

$$\frac{d\varepsilon_\eta}{dt} = \frac{p}{\eta}. \quad (31)$$

где  $t$  — время воздействия штампа на грунт,  $\eta$  — параметр вязкости почвогрунта.

На основе уравнений (30), (31) получена суперпозиционная реологическая модель грунта в виде дифференциального уравнения [27]:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_E}{dt} + \frac{d\varepsilon_\eta}{dt} = \frac{p}{\eta} + \frac{1}{E_0} \cdot \frac{dp}{dt}, \quad (32)$$

решение которого при  $p = \text{const}$  имеет вид [27]:

$$\varepsilon = \frac{p}{\eta}t + \frac{p}{E_0} = \frac{p}{E_0} \cdot \left(1 + \frac{t}{\tau}\right), \quad (33)$$

где обозначено:  $\tau = \eta/E_0$ ,  $t$  — время воздействия.

Для расчёта времени воздействия движителя на опорную поверхность пользуются уравнением [27]:

$$t = \frac{l}{v}, \quad (34)$$

где  $l$  — длина пятна контакта движителя с опорной поверхностью,  $v$  — поступательная скорость машины.

Формулу (33) можно представить с учётом уравнения (34), тогда [27]

$$\varepsilon = \frac{q}{E_1} \cdot \left(1 + \frac{l}{\tau v}\right). \quad (35)$$

С учётом того, что толщина деформируемого слоя грунта, как правило, ограничена, уравнения (28), (30) можно представить следующим образом [27]:

$$\frac{h_2 - h_1}{H} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_0} = \frac{\omega b \cdot (p_2 - p_1) \cdot (1 - \nu^2)}{E_0 H}, \quad (36)$$

где  $H$  — толщина деформируемого слоя почвогрунта,  $\rho_0$  — плотность почвогрунта до воздействия движителя,  $\rho_1$  — плотность почвогрунта под воздействием давления  $p_1$ ,  $\rho_2$  — плотность почвогрунта под воздействием давления  $p_2$ .

Аналогичным образом для уравнения (35) получено [27]:

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_0} = \frac{\omega b \cdot (p_2 - p_1) \cdot (1 - \nu^2)}{E_0 H} \cdot \left(1 + \frac{l}{\tau v}\right). \quad (37)$$

Согласно формуле (1), связь давления и осадки штампа выражается степенной зависимостью, которую в случае однократного воздействия движителя можно записать [27]:

$$p_1 = kh_1^n. \quad (38)$$

При циклическом воздействии движителя предложено использовать уравнение [27]:

$$p_N + p_1 = k \cdot (p_N + p_1)^n, \quad (39)$$

где  $N$  — число циклов воздействия штампа-движителя на грунт.

Уравнение (39), с учётом записи (38), принимает вид [27]:

$$p_N = kh_N^n \cdot \left[ \left(1 + \frac{h_1}{h_N}\right)^n - \left(\frac{h_1}{h_N}\right) \right]. \quad (40)$$

При допущении о том, что  $z_N \gg z_1$ , зависимость давления от осадки движителя при  $N$ -кратном приложении нагрузки найдётся в виде выражения [27]:

$$p_N = kh_N^n, \quad (41)$$

следовательно, осадку при  $N$ -кратном воздействии движителя можно найти по формуле [27]:

$$h_N = h_1 N^{\frac{1}{n}}. \quad (42)$$

Согласно уравнению (36), плотность грунта связана с осадкой соотношением [27]:

$$\frac{\rho_{N+1} - \rho_0}{\rho_0} = \frac{h_N - h_1}{H}. \quad (43)$$

После подстановки выражения (42) в соотношение (43) получено [27]:

$$\frac{\rho_{N+1} - \rho_0}{\rho_0} = \frac{h_1}{H} \cdot \left(1 + N^{\frac{1}{n}}\right). \quad (44)$$

Из уравнений (1), (37) следует ещё одно соотношение [27]:

$$h_1 = \frac{\omega b q_1 \cdot (1 - \nu^2)}{E_0 H} \cdot \left(1 + \frac{l}{\tau \nu}\right). \quad (45)$$

Тогда при циклическом воздействии движителя получим уравнение уплотнения вязкоупругого грунта [27]:

$$\frac{\rho_{N+1} - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\omega b p_1 \cdot (1 - \nu^2)}{E_0 H} \cdot \left(1 + \frac{l}{\tau \nu}\right) \cdot \left(1 + N^{\frac{1}{n}}\right), \quad (46)$$

причём для упругого грунта формула (46) упростится [27]:

$$\frac{\rho_{N+1} - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\omega b q_1 \cdot (1 - \nu^2)}{E_0 H} \cdot \left(1 + N^{\frac{1}{n}}\right). \quad (47)$$

Также из формулы Бернштейна — Летошнева следует [27]:

$$h_1 = \left(\frac{p_1}{k}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad (48)$$

тогда формулу модуля деформации можно представить в виде [27]:

$$E_0 = k^n H p_1^{1 - \frac{1}{n}}. \quad (49)$$

С учётом формулы (49) и уравнений (46), (47) получены следующие зависимости для плотности вязкоупругого и упругого грунта соответственно [27]:

$$\frac{\rho_{N+1} - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\omega b p_1^{\frac{1}{n}} \cdot (1 - \nu^2)}{k^{\frac{1}{n}} H^2} \cdot \left(1 + \frac{l}{\tau \nu}\right) \cdot \left(1 + N^{\frac{1}{n}}\right), \quad (50)$$

$$\frac{\rho_{N+1} - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\omega b p_1^{\frac{1}{n}} \cdot (1 - \nu^2)}{k^{\frac{1}{n}} H^2} \cdot \left(1 + N^{\frac{1}{n}}\right). \quad (51)$$

Формулы (43), (46), (47) обобщены, в результате получено соотношение [27]:

$$\frac{P_N}{P_1} = 10^{\alpha \frac{h_N}{h_1}}, \quad (52)$$

где  $\alpha$  — параметр, зависящий от свойств грунта и штампа-двигателя.

Осадка штампа при  $N$ -кратном воздействии, согласно уравнению (52), находится по формуле [27]:

$$h_N = \frac{h_1}{\alpha} \lg N. \quad (53)$$

Выражения, сходные по структуре, используются в работах [28], [29].

С учётом выражения (53) уравнение относительной деформации сжатия грунта получено в виде [27]:

$$\frac{h_N + h_1}{H} = \frac{h_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{\alpha} \lg N\right)}{H}. \quad (54)$$

Тогда уравнение уплотнения вязко-упругого грунта (46) представится в виде [27]:

$$\frac{\rho_{N+1} - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\omega b p_1 \cdot (1 - \nu^2)}{E_0 H} \cdot \left(1 + \frac{l}{\tau \nu}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\alpha} \lg N\right), \quad (55)$$

или с учётом формулы модуля деформации (49) [27]:

$$\frac{\rho_{N+1} - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\omega b p_1^{\frac{1}{n}} \cdot (1 - \nu^2)}{k^{\frac{1}{n}} H^2} \cdot \left(1 + \frac{l}{\tau \nu}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\alpha} \lg N\right). \quad (56)$$

Для упругого грунта аналогично получено [27]:

$$\frac{\rho_{N+1} - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\omega b p_1 \cdot (1 - \nu^2)}{E_0 H} \cdot \left(1 + \frac{1}{\alpha} \lg N\right), \quad (57)$$

или с учётом формулы модуля деформации [27]:

$$\frac{\rho_{N+1} - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\omega b p_1^n \cdot (1 - \nu^2)}{k^n H^2} \cdot \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \lg N \right). \quad (58)$$

Отметим, что для расчёта осадки под воздействием многоосных машин, когда происходят последовательные проходы колёс по следу, ранее были предложены эмпирические формулы [63]:

$$p = p_u - k_u (z_u - z), \quad (59)$$

$$k_u = k_0 + A_u z_u, \quad (60)$$

где  $p_u$ ,  $z_u$  — давление и осадка при начале разгрузки грунта,  $k_u$  — средний наклон линии графика зависимости «давление — осадка», построенного по экспериментальным данным,  $k_0$ ,  $A_u$  — параметры модели.

Далее рассмотрим математические модели, базирующиеся на теоретических решениях задач механики деформируемой среды.

Известно решение классической задачи механики деформируемой среды о вдавливании штампа в упругое полупространство (задача Буссинеска) [61]:

$$p = \frac{2}{C_f} \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{h}{B}, \quad (61)$$

где  $C_f$  — параметр формы штампа,  $E$  — модуль упругости деформируемого полупространства,  $\nu$  — коэффициент Пуассона полупространства,  $B$  — параметр размера штампа.

На основе решения задачи Буссинеска в работе [30] получена формула:

$$p = k(r, h) \frac{EH}{k_k R} \left( \frac{1}{\operatorname{arctg} \frac{H}{R}} - \frac{1 - \frac{h}{H}}{\operatorname{arctg} \frac{H-h}{R}} \right), \quad (62)$$

где  $k_k$  — параметр, учитывающий влияние уплотнённого ядра грунта на уплотнение близлежащих слоёв,  $R$  — параметр штампа-движителя,  $k(r, h)$  — безразмерная функция, учитывающая снижение напряжений в грунте по мере удаления расчётной точки от границы трелёвочного волокна.

Для параметров  $k_k$ ,  $R$  получены уравнения [30]:

$$k_k = \operatorname{tg}^{-5/3} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right), \quad (63)$$

$$R = aD, \quad (64)$$

где  $\varphi$  — угол внутреннего трения грунта,  $a$  — коэффициент учёта толщины деформируемого слоя грунта [1]:

$$a = 0,64 \left( 1 + \frac{b}{H} \right). \quad (65)$$

При необходимости учесть влияние поворота движителя на осадку в уравнении (62) давление  $p$  следует заменить на приведённое давление [1], [30]:

$$\bar{p} = \sqrt{p^2 + \tau^2}, \quad (66)$$

где  $\tau$  — напряжение сдвига, вызванное поворотом движителя, зависящее от свойств грунта, параметров движителя и угла поворота.

В фундаментальном исследовании [1] рассмотрена теоретическая задача об определении сжатия элементарных слоёв деформируемого массива грунта, в результате получено уравнение связи нормального давления и осадки грунта под воздействием штампа-движителя. Рассмотрим вывод уравнения подробнее.

Сжатие элементарного слоя грунта (слоя бесконечно малой толщины) задаётся уравнением [1]:

$$dh^* = \frac{\sigma}{E - \sigma} dz, \quad (67)$$

где  $\sigma$  — нормальное напряжение, возникающее в деформируемом грунте в результате воздействия штампа-движителя,  $z$  — вертикальная координата, отсчитываемая вниз от поверхности контакта движителя с грунтом.

Нормальное напряжение принимается затухающим по глубине деформируемого массива грунта, что согласуется с экспериментальными наблюдениями [1]:

$$\sigma = \frac{Jp}{1 + \left( \frac{z}{ab} \right)^2}, \quad (68)$$

где  $J$  — параметр, учитывающий соотношение сторон пятна контакта, которое считается прямоугольным [1].

Суммарное сжатие всего деформируемого массива грунта, складывающееся из сжатий элементарных его слоёв, определяется интегрированием [1]:

$$h^* = \int_0^{H-h^*} \frac{\sigma}{E - \sigma} dz. \quad (69)$$

В оригинале автор принимает допущение  $\frac{\sigma}{E - \sigma} \approx \frac{\sigma}{E}$  [1], при котором интеграл по формуле (69) имеет вид [1]:

$$h^* = \frac{Jpab}{E} \operatorname{arctg} \left( \frac{H - h^*}{ab} \right). \quad (70)$$

В формуле (71) параметр  $J$ , характеризующий геометрию пятна контакта, находится по формуле [1]:

$$J = \frac{0,03 + \frac{l}{b}}{0,6 + 0,43 \frac{l}{b}}. \quad (71)$$

Действительное значение осадки  $z$  находят с учётом поправки, обусловленной развитием сдвиговых деформаций при приближении давления  $p$  к несущей способности грунта  $p_s$  [1]:

$$h = h^* \frac{p_s}{p_s - p}, \quad (72)$$

таким образом, на основании (71) получено [1]:

$$h = \frac{p_s}{p_s - p} \frac{J p a b}{E} \arctg \left( \frac{H - h}{ab} \right). \quad (73)$$

Решение уравнения (73) относительно нормального давления имеет вид [1]:

$$p = \frac{h E p_s}{h E + p_s J a b \arctg \frac{H - h}{ab}}. \quad (74)$$

Несущую способность в работе [1] рассчитывают по формуле:

$$p_s = \frac{\pi}{2} p_{s0} \arctg \frac{\pi \cdot (H - h)}{2b}, \quad (75)$$

где  $p_{s0}$  — несущая способность деформируемого массива грунта неограниченной толщины, определяемая в зависимости от механических свойств грунта и параметров пятна контакта [1]:

$$p_{s0} = K_{\beta 1} J_1 X_1 b + K_{\beta 2} J_2 X_2 + X_3 h, \quad (76)$$

где  $X_1, X_2, X_3$  — параметры, зависящие от сцепных и фрикционных свойств грунта,  $I_1, I_2$  — параметры, зависящие от соотношения сторон пятна контакта, которое считается прямоугольным,  $K_{\beta 1}, K_{\beta 1}$  — параметры, зависящие от угла отклонения вектора результирующей нагрузки со стороны движителя от нормали к опорной поверхности [1]:

$$J_1 = \frac{l}{l + 0,4b}; J_3 = \frac{l + b}{l + 0,5b}, \quad (77)$$

$$X_1 = \frac{1 - III^4}{III^5}; X_2 = \frac{1}{III^2}; X_3 = \frac{2(1 + III^2)}{III^3} C; III = \tg \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right), \quad (78)$$

$$K_{\beta 1} = \frac{\pi - 4\beta \tg \varphi}{\pi + 4\beta \tg \varphi}; K_{\beta 2} = \frac{3\pi - 2\beta}{3\pi + 2\beta}, \quad (79)$$



где  $\beta$  — угол отклонения вектора результирующей нагрузки со стороны движителя от нормали к опорной поверхности.

Впоследствии было установлено [10], [48], что расчётные значения несущей способности по формулам (76)—(79) несколько не соответствуют экспериментальным наблюдениям на некоторых типах грунтов.

В связи с этим обстоятельством позднее были выполнены дополнительные исследования.

В работе [68] предложена модификация формулы (71), в которую введены поправочные коэффициенты для корректировки значения несущей способности грунта:

$$p = \frac{1}{\frac{D_1}{p_s} + \frac{D_2}{Eh} \omega b \xi}, \quad (80)$$

параметры которой определяются уравнениями [68]:

$$D_1 = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi(H-z)}{2b}, \quad (81)$$

$$D_2 = \operatorname{arctg} \frac{\pi(H-z)}{ab}, \quad (82)$$

$$\omega = aJ, \quad (83)$$

$$\xi = 1 + 1,86 \left( \frac{\chi}{2} + \frac{\chi^2}{3} - \frac{\chi^3}{5} \right), \quad (84)$$

$$\chi = 2,5(1 - \exp(-3,74b)), \quad (85)$$

$$p_s = \gamma \left[ b \exp(6,65 \operatorname{tg} \varphi - 1,75) \left( 1 + 0,25 \frac{b}{l} \right) + \gamma h \exp(4,76 \operatorname{tg} \varphi + 0,15) \left( 1 + 1,5 \frac{b}{l} \right) \right] + C \exp(3,32 \operatorname{tg} \varphi + 1,5) \left( 1 + 0,3 \frac{b}{l} \right) \quad (86)$$

Кроме того, в МГТУ им. Баумана [10] получено уточнённое выражение для несущей способности, при использовании которого отмечаются корректные результаты практически во всём спектре грунтовых условий:

$$p_s = p_{s0} \alpha_z, \quad (87)$$

где  $\alpha_z$  — коэффициент учёта толщины деформируемого слоя грунта [10]:

$$\alpha_z = 1 + \frac{h \frac{\sqrt{2}}{2} \exp \left[ \left( \frac{\pi}{4} + \frac{3\varphi}{4} \right) \tan \frac{3\varphi}{4} \right] b \cos \frac{3\varphi}{4} \tan \varphi}{2 \frac{H}{\cos \beta} \cdot \left( \frac{H}{\cos \beta} - h - 0,25 \frac{\sqrt{2}}{2} \exp \left[ \left( \frac{\pi}{4} + \frac{3\varphi}{4} \right) \tan \frac{3\varphi}{4} \right] b \cos \frac{3\varphi}{4} \tan \varphi \right)}. \quad (88)$$

На наш взгляд, использование формул (69), (73), (87), (88) предпочтительнее, поскольку не нарушается общая структура математической модели и логика теории Я. С. Агейкина.

Рассмотрим дальнейшее развитие подхода. Выражение для сжатия при интегрировании (69) без допущения (70) имеет вид [10], [31]:

$$h^* = \frac{Jp}{a\sqrt{E(E-Jp)}} \operatorname{arctg} \left( \frac{aE \cdot (H-h^*)}{\sqrt{E(E-Jp)}} \right). \quad (89)$$

По формуле (72) с учётом поправки (73) следует [10], [31]:

$$h = \frac{Jp_s p a b}{(p_s - p)\sqrt{E(E-Jp)}} \operatorname{arctg} \left( \frac{E(Hp - h(p_s - p))}{abp\sqrt{E(E-Jp)}} \right). \quad (90)$$

В работе [18] предложено уравнение для расчёта осадки грунтов с неограниченной толщиной деформируемого слоя, полученное на базе формулы (90):

$$h = \frac{p_s J p a b}{\pi(p_s - p)\sqrt{E^2 - EJp}}. \quad (91)$$

При необходимости учесть длительность воздействия штампа на грунт, в т. ч. обусловленную цикличностью приложения нагрузки, пользуются поправочным коэффициентом динамичности нагрузки [4]:

$$p = p_{st} k_d, \quad (92)$$

где  $p_{st}$  — давление движителя на грунт, полученное как частное приведённой нагрузки и площади пятна контакта,  $k_d$  — коэффициент учёта времени воздействия движителя на грунт (коэффициент динамичности).

Как правило, пользуются коэффициентом динамичности, полученным для грунта, реология которого описывается моделью Максвелла [4]:

$$k_d = t / (t + t_p), \quad (93)$$

где  $t_p$  — время релаксации напряжений в грунте (экспериментальная величина).

Коэффициент по формуле (93) является понижающим и по своему физическому смыслу является отношением деформации тела Максвелла (развивающейся по времени и стремящейся в пределе к конечному значению деформации тела Гука с модулем  $E$ ) к деформации тела Гука (мгновенной при модуле  $E$ ).

Согласно экспериментам, реология грунтов далеко не во всех случаях корректно моделируется с использованием уравнений деформаций тела Максвелла.

Под нашим руководством в работе [20] исследовано воздействие переменной нагрузки со стороны гусеничного движителя, использована комбинированная реологическая модель грунта на основе моделей Кельвина — Фойгта, Шведова — Бингама и Бингама, в результате установлены поправочные коэффициенты на время воздействия и неравномерность нагрузки со стороны гусеничного движителя [20]:

$$k_d = 1 - \left( E_2 \exp\left(-t \frac{E_2}{\eta_2}\right) + E_3 \exp\left(-t \frac{E_3}{\eta_3}\right) \right), \quad (94)$$

$$k_p = \left( \frac{P_{\max}}{p} - 1 \right) \left( -0,33 \frac{v}{l} (n_t - 1) + 0,775 \right) + 1, \quad (95)$$

где  $E_2$  — модуль необратимой деформации при кратковременном действии нагрузки,  $E_3$  — модуль необратимой деформации при длительном воздействии;  $\eta_2$  и  $\eta_3$  — характеристики скоростей течения необратимых деформаций при кратковременной и длительной нагрузках,  $p_{\max}$  — максимальное давление (под катком гусеничного движителя),  $n_t$  — число катков гусеничного движителя.

В работе [21], также выполненной под нашим руководством, рассмотрено воздействие колёсного движителя на грунт при произвольной реологической модели грунта. Для этого уравнение (69) представлено в виде:

$$h = \int_0^{H-h} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} dz, \quad (96)$$

где выражение для относительной деформации содержит поправочные коэффициенты на потерю несущей способности и жёсткость грунта с учётом его реологии [21]:

$$\varepsilon = C_g K_p \sigma, \quad (97)$$

где  $C_g$  — жёсткость грунта, определяющаяся его реологической моделью,  $K_p$  — коэффициент на потерю несущей способности [21]:

$$K_p = \frac{P_s}{p_s - \sigma}. \quad (98)$$

При взятии интеграла по уравнению (96) в данном случае  $p_s = \text{const}$ .

На основе работы [32] жёсткость для модели Гука [21]:

$$C_g = \frac{1}{E}, \quad (99)$$

для модели Максвелла [21]:

$$C_g = \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta}, \quad (100)$$

для модели Максвелла — Томпсона [21]:

$$C_g = \frac{E + E_2}{EE_2} - \frac{1}{E_2} \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right), \quad (101)$$

где  $E_2$  — модуль длительной деформации грунта, или, при  $E = E_2$  [21]:

$$C_g = \frac{2}{E} - \frac{1}{E} \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right), \quad (102)$$

для модели Бюргерса [21]:

$$C_g = \frac{(E + E_2)}{EE_2} + \frac{1}{\eta_2} t - \frac{1}{E_2} \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right), \quad (103)$$

или, при  $E = E_2$  [21]:

$$C_g = \frac{2}{E} + \frac{t}{\eta} - \frac{1}{E} \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right). \quad (104)$$

Интеграл по формуле (96) с учётом выражений (97), (98) имеет вид [21]:

$$h = \frac{a^2 b^2 C_g p_s J p}{\sqrt{p_s a^2 b^2 (-C_g p_s J p + p_s - J p)}} \operatorname{arctg} \left( \frac{p_s}{\sqrt{p_s a^2 b^2 (-C_g p_s J p + p_s - J p)}} (H - h) \right). \quad (105)$$

Уравнения (74), (90), (91), (105) не имеют точного аналитического решения относительно осадки  $z$ , в связи с чем предлагались различные упрощения формул, предназначенные для моделирования осадки в конкретных грунтовых условиях. Например, для лесных почвогрунтов получено уравнение [21]:

$$h = \sqrt{\frac{4B_z}{p_s}} \left( \sqrt{\frac{(A_z + B_z)^2}{A_z^2} - \frac{H \sqrt{p_s B_z}}{A_z} - \frac{B_z}{A_z} - 1} \right) + H, \quad (106)$$

где использованы вспомогательные обозначения [21]:

$$A_z = a^2 b^2 C_g p_s J p, \quad (107)$$

$$B_z = a^2 b^2 (-C_g p_s J p + p_s - J p). \quad (108)$$

Современные программы для реализации математических вычислений предоставляют исследователям широкие возможности для проведения вычислительных экспериментов. В работе [31] на основе формул (76)—(79), (87), (88) была получена приближенная зависимость несущей способности лесного почвогрунта в виде степенной функции его модуля деформации и параметров движителя. Впоследствии на основе обработки данных, полученных по результатам вычислительных экспериментов, предложены уравнения для глубины колеи и тягово-сцепных свойств движителей лесных колёсных и гусеничных машин [20], [23], [33]. В ряде работ использованы формулы для приведённого давления, аналогичные уравнению (66), что позволило учесть влияние касательного напряжения, возникающего вследствие буксования, на осадку грунта [17—20], [22], [23], [34].

Приведём основные результаты.

В работе [17] для колёсных форвардеров, работающих на лесных почвогрунтах, получено уравнение:

$$h = 0,0799 \cdot \frac{(0,01K_L - 0,00616)(M + 2,8)(0,01b + 0,0667)}{E^{1,68}}, \quad (109)$$

$$10 \text{ т} \leq [M] \leq 20 \text{ т}, 50 \% \leq [K_L] \leq 100 \%, \\ 0,6 \text{ м} \leq b \leq 0,8 \text{ м}, 0,4 \text{ МПа} \leq E \leq 3 \text{ МПа},$$

где  $K_L$  — коэффициент загрузки кузова форвардера,  $M$  — масса форвардера.

В работе [34] вычислительный эксперимент использован для получения уравнений глубины колеи в зависимости от угла приложения результирующей нагрузки со стороны движителя колёсного форвардера:

$$h = 0,0093G_w \cdot (1 + \beta)^{0,0904}, \quad (110)$$

$$1,5 \text{ т} \leq G_w \leq 4,5 \text{ т}, 5^\circ \leq \beta \leq 30^\circ,$$

где  $G_w$  — нагрузка на колесо, схожие результаты с учётом толщины деформируемого слоя лесного почвогрунта получены в работе [35].

В работе [19] исследовано уплотнение связных грунтов (супесей, суглинков и глин) колёсными форвардерами, в результате предложена зависимость:

$$\bar{\rho} = 1 + \frac{0,011G_v^{0,288}}{b \cdot (E \cdot H)^{0,645}} \cdot \left( 1 + \frac{15,9}{K_{СДВ}^{0,853} N^{0,243}} \right) \cdot \ln(N + 1), \quad (111)$$

$$0,6 \text{ м} \leq b \leq 0,8 \text{ м}, 0,5 \text{ МПа} \leq E \leq 7,5 \text{ МПа}, 0,3 \text{ м} \leq H \leq 0,8 \text{ м}, \\ 1 \leq N \leq 25, 15 \text{ т} \leq G_v \leq 35 \text{ т}, 0,5 \leq K_{СДВ} \leq 5,$$

где  $G_v$  — масса машины,  $K_{СДВ}$  — безразмерный коэффициент, учитывающий изменение сдвиговых свойств грунта при уплотнении и зависящий от процентного содержания глинистых частиц в грунте.

В работе [20] исследованы показатели работы гусеничных лесных машин на связных и несвязных грунтах, в результате получена формула:

$$h = a_0 b^{a_1} l^{a_2} p^{a_3} p_s^{a_4}, \quad (112)$$

$$0,4 \text{ м} \leq b \leq 0,7 \text{ м}, 4 \text{ м} \leq l \leq 7 \text{ м}, \\ 0,025 \text{ МПа} \leq p \leq 0,1 \text{ МПа}, 0,05 \text{ МПа} \leq p_s \leq 0,35 \text{ МПа},$$

где  $a_i$  — коэффициенты, зависящие от типа грунта.

В работах [18], [36] представлено уравнение глубины колеи, образующейся при работе малогабаритных лесных машин на слабонесущих почвогрунтах:

$$h = 0,000489 p_w^{0,237} G_w^{2,046} \beta^{0,149} E^{-2,422} b^{2,373} d^{0,982} v^{0,0719}, \quad (113)$$

$$0,15 \text{ м} \leq b \leq 0,35 \text{ м}, 0,1 \text{ МПа} \leq E \leq 1,0 \text{ МПа}, \\ 0,15 \text{ МПа} \leq p_w \leq 0,75 \text{ МПа}, 0,5 \text{ т} \leq G_w \leq 2,5 \text{ т}, \\ 0,6 \text{ м} \leq d \leq 1,2 \text{ м}, 1^\circ \leq \beta \leq 30^\circ, 1 \text{ км/ч} \leq v \leq 5 \text{ км/ч},$$

где  $p_w$  — давление воздуха в шине,  $S$  — коэффициент буксования.

В исследовании [23] проведён вычислительный эксперимент по исследованию колеобразования и тягово-сцепных свойств колёсных движителей при работе на лесных почвогрунтах. Факторы и интервалы их варьирования представлены в таблице 1.

**Таблица 1.** Интервалы варьирования факторов в вычислительном эксперименте по исследованию глубины колеи после однократного прохода колёсного движителя и его тягово-сцепных свойств [23]

**Table 1.** Intervals of variation of factors in computational experiment to study the rut depth after a single pass of wheeled vehicle [23]

Параметр	Ед. изм.	Интервал варьирования
$E$	МПа	0,4—3,5
$S$	б/р	0,05—0,3
$b$	м	0,4—0,8
$d$	м	1,2—1,8
$p_w$	МПа	0,15—0,55
$G_w$	кН	15—55
$\beta$	°	1—30
$m$	б/р	0,25—0,55
$t$	м	0,1—0,3
$H_T$	м	0,4—0,8
$v$	км/ч	1—5

В таблице 1 обозначено:  $m$  — коэффициент насыщенности протектора,  $t_2$  — шаг грунтозацепов,  $H_T$  — высота шины.

По результатам обработки расчётных данных установлена зависимость [23]:

$$h = \frac{0,000479 p_w^{0,186} G_w^{1,544} \beta^{0,0618} t_2^{0,0472} H_T^{0,0414}}{E^{1,637} S^{0,0325} b^{2,197} d^{0,652} v^{0,0338}}. \quad (114)$$

Обратим внимание, что коэффициент буксования  $S$  входит в уравнение (114) как независимый параметр. К сожалению, рекомендаций по его прогнозированию в научной литературе сравнительно мало. Например, [69] рекомендует принимать  $S = 0,2$  для колёсного движителя, однако на практике коэффициент буксования может быть значительно выше, значение его, строго говоря, определяется показателями взаимодействия движителя и грунта, а также параметрами движителя и грунта.

Буксование как независимый параметр используется и в эмпирических моделях. Например, в работе [62] предложена формула:

$$h = h_0 + \frac{h_g S}{1 - S}, \quad (115)$$

где  $h_0$  — осадка при отсутствии буксования,  $h_g$  — высота грунтозацепа.

Известна ещё одна зависимость [61]:

$$h = h_0 + SH_p, \quad (116)$$

где  $H_p$  — глубина распространения деформации в грунте, экспериментальный параметр.

Также предложено уравнение [61]:

$$h = \left( \frac{1 + S}{1 - 0,5S} \right) h_0. \quad (117)$$

На основе модели М. Г. Беккера в работах [67], [70] предложены уравнения:

$$p = \left( \frac{k_c}{b} + k_\varphi \right) h^n, \quad (118)$$

$$n = n_0 + n_1 S. \quad (119)$$

Далее получены функции  $\lambda_N$  к уравнению (16) [67]:

$$\lambda_N = \left( \frac{h}{h_0} \right)^{n_0 - 1 + n_1 S}, \quad (120)$$

$$\lambda_N = \left( \frac{h}{h_0} \right)^{n_0 - 1 + n_1 S + n_2 S^2}, \quad (121)$$

$$\lambda_N = \left( \frac{h}{h_0} \right)^{n_0 - 1 + n_1 S + n_2 S^2 + n_3 S^3}. \quad (122)$$

Также известны эмпирические WES-модели, распространённые за рубежом [69], [71], [72]. Модели используют параметр грунта, инвариантный по отношению к параметрам движителя — конусный индекс  $CI$  (*cone index*), который определяется зондированием в полевых условиях по стандартизированной методике [60] (вручную). Кроме того, предложены методы снижения трудоёмкости сбора информации по прочности грунта, в т. ч. путём установки зонда на корпусе машины [73—82] и на основе данных дистанционных замеров [83], [84]. Конусный индекс является интегральной характеристикой прочности грунта и связан с его сдвиговыми свойствами [69], [71], [85—89]. Колёсный движитель характеризуется несколькими параметрами, получившими название *wheel numeric*:

$$N_c = \frac{CI \cdot b \cdot d}{G_w}, 394 \quad (123)$$

$$N_{CC} = \frac{CI \cdot b \cdot d}{G_w} \sqrt{\frac{h_z}{H_T}}, 277 \quad (124)$$

$$N_{CI} = \frac{CI \cdot b \cdot d}{G_w} \cdot \sqrt{\frac{h_z}{H_T}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{B}{2D}}, 362 \quad (125)$$

$$N_R = \frac{CI \cdot b^{0,85} \cdot d^{1,15}}{G_w} \cdot \sqrt{\frac{h_z}{H_T}}, 354,355 \quad (126)$$

$$N_M = \frac{CI \cdot b^{0,8} \cdot d^{0,8}}{G_w} \cdot h_z^{0,4}, 328 \quad (127)$$

$$N_B = \frac{CI \cdot b \cdot d}{G_w} \cdot \left( \frac{1 + 5 \frac{h_z}{H_T}}{1 + 3 \frac{b}{d}} \right), 360 \quad (128)$$

где  $h_z$  — радиальная деформация колеса.

Ниже приведём наиболее распространённые WES-модели, предназначенные для расчёта глубины колеи, образующейся на различных грунтах под воздействием колёсных машин:

$$h = 0,003 + \frac{0,38}{N_{CC}}, [96] \quad (129)$$

$$h = \frac{0,328}{N_{CI}}, [96] \quad (130)$$

$$h = 0,005 + \frac{1,212}{N_C}, [96] \quad (131)$$

$$h = \left( 0,003 + \frac{0,287}{N_{CC}} \right) \cdot d, [96] \quad (132)$$

$$h = \left( -0,001 + \frac{0,248}{N_{CI}} \right) \cdot d, [96] \quad (133)$$

$$h = \left( 0,003 + \frac{0,91}{N_{CI}} \right) \cdot d, [96] \quad (134)$$

$$h = \frac{0,142}{N_{CI}^{0,83}} \cdot d, [95,96] \quad (135)$$



$$h = \frac{0,13}{N_M^{0,88}} \cdot d, [95,96] \quad (136)$$

$$h = \frac{0,432}{C_N^{0,79}} \cdot d, [95,96] \quad (137)$$

$$h = \frac{0,108}{N_{CI}^{0,76}} \cdot d, [95,96] \quad (138)$$

$$h = \frac{0,122NGP \cdot S^{1,41}}{CI^{0,54}}, [95,96] \quad (139)$$

$$h = 0,01 + \frac{0,61}{N_{CI}}, [97] \quad (140)$$

$$h = \frac{0,875}{N_{CI}^{1,36}}, [97] \quad (141)$$

$$h = 0,059 + \frac{0,49}{N_{CI}}, [97] \quad (142)$$

$$h = \frac{0,989}{N_{CI}^{1,23}}, [97] \quad (143)$$

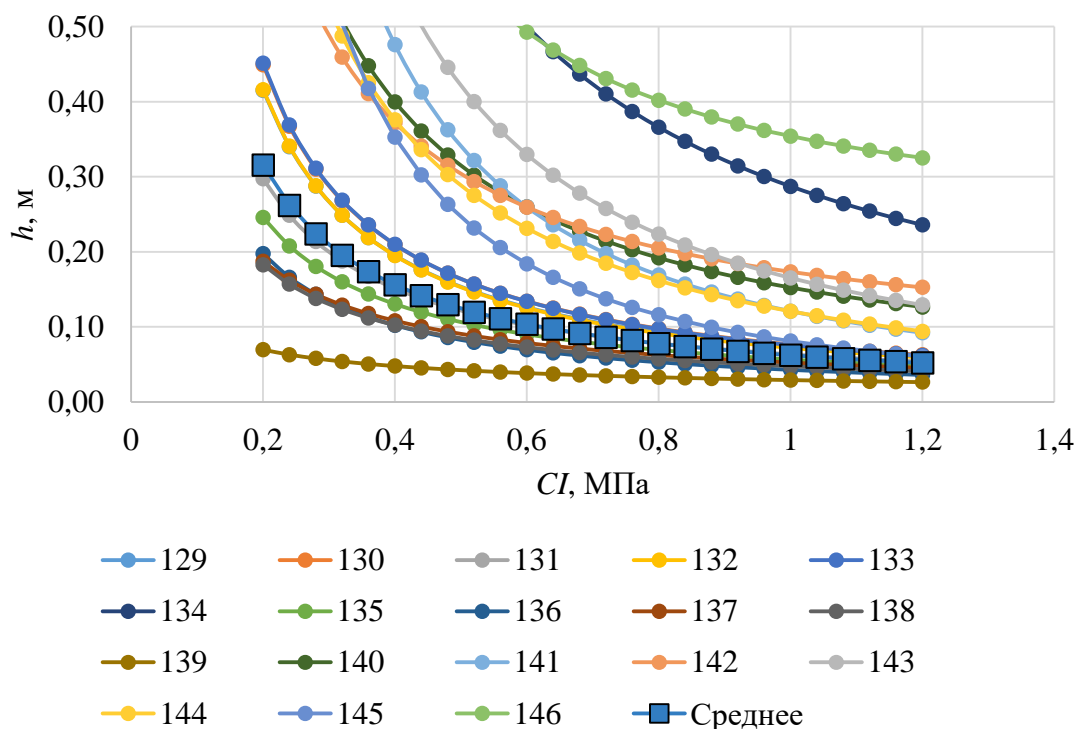
$$h = -0,026 + \frac{0,629}{N_{CI}}, [97] \quad (144)$$

$$h = \frac{0,678}{N_{CI}^{1,46}}, [97] \quad (145)$$

$$h = -0,042 + 0,0055MC_{VOL} + \frac{0,875}{N_{CI}^{1,36}}, [97] \quad (146)$$

где  $NGP$  — номинальное давление на грунт (*nominal ground pressure*) [98],  $MC_{VOL}$  — объёмное содержание влаги в грунте.

Результаты расчётов по формулам (129)—(46) [69], [96], [97] при  $d = 1,333$  м,  $B = 0,7$  м,  $G_w = 45$  кН,  $h_Z/H_T = 0,1$  представлены на рисунке 1.



**Рисунок 1.** Результаты расчёта глубины колеи по WES-моделям ( $D = 1,333$  м,  $B = 0,7$  м,  $G_w = 45$  кН,  $h_z/H_T = 0,1$ )

**Figure 1.** Results of calculating the rut depth using WES-models ( $D = 1.333$  m,  $B = 0.7$  m,  $G_w = 45$  kN,  $h_z/H_T = 0.1$ )

В нашей статье [37] было показано, что конусный индекс  $CI$  и модуль деформации лесного почвогрунта  $E$  связаны линейной зависимостью, затем результаты были дополнены зависимостями  $CI$  и механических свойств заболоченных, связных и несвязных грунтов [99], [100]. Впоследствии при наличии эмпирической базы WES-модели на основе конусного индекса  $CI$  успешно использовались для верификации результатов теоретических разработок, использующих в качестве характеристики грунта модуль деформации  $E$  [20—23], [38], проводились исследования по сопоставлению результатов стендовых испытаний движителей с расчётными данными по WES-моделям [101].

При использовании WES-моделей для учёта цикличности приложения нагрузки пользуются поправочным множителем [102]:

$$h_n = h_1 N^{1/a}, \quad (147)$$

где  $a$  — коэффициент учёта цикличности нагрузки.

Коэффициент цикличности  $a$  для несвязных грунтов предлагается определять с учётом влажности и размера частиц грунта [69]. В работе [102] коэффициент  $a$  рекомендуется принимать в зависимости от механической прочности грунта по таблице 2.

**Таблица 2.** Коэффициент цикличности для связных грунтов с учётом прочности грунта [102]

**Table 2.** Cyclic coefficient for cohesive soils, taking into account the strength of the soil [102]

Грунт	Коэффициент цикличности
Слабонесущий	2—3
Со средней несущей способностью	3—4
Прочный	4—5

Также известны выражения коэффициента  $a$ , полученные с использованием характеристик движителя и грунта [102]:

$$a = \frac{\ln 2}{\ln \left( \frac{N_{CI}}{N_{CI} - 0,896} \right)^{1,25}}, \quad (148)$$

$$a = 1,5N_{CI}^{0,7}, \quad (149)$$

$$a = 0,011CI^{0,9}, \quad (150)$$

$$a = 2N_{CI}^{0,33}, \quad (151)$$

$$a = 1,7N_{ML}^{0,57}, \quad (152)$$

$$a = 0,02N_C^{2,2}, \quad (153)$$

$$a = 0,3N_C. \quad (154)$$

### 3.2. Модели для оценки тягово-цепных свойств движителя

Рассмотрим известные зависимости для оценки силы сцепления движителя с опорной поверхностью и силы сопротивления деформируемого грунта поступательному движению машины.

Силу сцепления определяют как интеграл от касательного напряжения, обусловленного сопротивлением грунта сдвигу [1], [20]:

$$F_T = \int_0^l b \tau dx, \quad (155)$$

где  $\tau$  — касательное напряжение,  $x$  — горизонтальная координата, отсчитываемая по длине пятна контакта движителя с опорной поверхностью.

В ряде математических моделей для построений используется величина максимального касательного напряжения, которое грунт способен выдержать без среза слоёв. Его величину определяют, например, на основании формулы Кулона — Мора [1]:

$$\tau_{\max} = C + \sigma \operatorname{tg} \varphi. \quad (156)$$

В работе [103] зависимость касательного напряжения от сдвиговой деформации предложено определять по формуле:

$$\tau = \tau_{\max} \frac{\exp\left\{\left(-K_2 + \sqrt{K_2^2 - 1}\right)K_1 j\right\} - \exp\left\{\left(-K_2 - \sqrt{K_2^2 - 1}\right)K_1 j\right\}}{\exp\left\{\left(-K_2 + \sqrt{K_2^2 - 1}\right)K_1 j_0\right\} - \exp\left\{\left(-K_2 - \sqrt{K_2^2 - 1}\right)K_1 j_0\right\}}, \quad (157)$$

где  $K_1, K_2$  — параметры модели,  $j$  — сдвиговая деформация.

Согласно Г. И. Покровскому, сдвиговая деформация и напряжение связаны уравнением [61]:

$$\tau = \{C_1 \exp(-C_2 j) + C_3\} \cdot \{1 - \exp(-C_4 j)\}, \quad (158)$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  — параметры модели.

Зависимости (157), (158) имеют точки максимума. В некоторых случаях зависимость напряжения от деформации сдвига максимума не имеет, тогда [61]:

$$\tau = \tau_{\max} \left\{1 - \exp\left(-\frac{j}{K}\right)\right\}, \quad (159)$$

где  $K$  — параметр модели.

В работах [7], [8] получены уравнения напряжения сдвига, при использовании которых напряжение достигает максимума и далее практически не изменяет своего значения:

$$\tau = \tau_{\max} \left\{1 - \exp\left(-\frac{j}{K}\right)\right\}, \quad (160)$$

$$a = 2,55 \left(\frac{\tau_{\max}}{\tau_{\text{res}}} - 1\right)^{0,825}, \quad (161)$$

где  $\tau_{\text{res}}$  — напряжение сдвига, не зависящее от деформации,  $K_{\omega}$  — деформация сдвига, при которой отмечается максимальное напряжение.

Теми же свойствами обладает скорректированная модель [104]:

$$\tau = \tau_{\max} K_r \left\{ 1 - \frac{\sqrt{1-K_r} \exp\left(\frac{j}{K_\omega} \lg\left(1 + \frac{\sqrt{1-K_r}-1}{K_r}\right)\right)}{\sqrt{1-K_r}\left(1 - \frac{2}{K_r}\right) + \frac{2}{K_r} - 2} \right\} \cdot \left\{ 1 - \exp\left(\frac{j}{K_\omega} \lg\left(1 + \frac{\sqrt{1-K_r}-1}{K_r}\right)\right) \right\} \quad (162)$$

где  $K_r$  — отношение  $\tau_{\text{res}}/\tau_{\text{max}}$ , а также более простая модель [63]:

$$\tau = \tau_{\max} K_r \left\{ 1 + \left[ \frac{1}{K_r \left(1 - \frac{1}{e}\right)} \right] \exp\left(1 - \frac{j}{K_\omega}\right) \right\} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{j}{K_\omega}\right) \right\}. \quad (163)$$

Известна модель, в которой разделяются составляющие напряжения сдвига, вызванные сцеплением и внутренним трением грунта [105]:

$$\tau = \tau_c + \tau_\varphi, \quad (164)$$

$$\tau_c = C \frac{j}{d_c} \exp\left(1 - \frac{j}{d_c}\right), \quad (165)$$

$$\tau_\varphi = p \operatorname{tg} \varphi \left\{ 1 - \exp\left(\frac{j}{d_\varphi}\right) \right\}, \quad (166)$$

где  $d_c, d_\varphi$  — параметры моделей.

Предложена модель, учитывающая удельный вес грунта при расчёте касательного напряжения [106]:

$$\tau = \tau_{\text{res}} \left\{ \frac{k_\gamma j}{k} \exp\left(1 - \frac{j}{k}\right) - \left(1 - \exp\left(-\frac{j}{k}\right)\right) \right\}, \quad (167)$$

где  $k_\gamma, k$  — параметры модели, зависящие от удельного веса грунта.

Для органо-минеральных грунтов, у которых зависимость напряжения сдвига имеет максимум, предложено уравнение [63]:

$$\tau = \tau_{\max} \left(\frac{j}{K_\omega}\right) \exp\left(1 - \frac{j}{K}\right). \quad (168)$$

Известны различные методики определения параметров моделей (156)—(168), характеризующих сопротивление сдвигу [107—113].

В работе [1] получено уравнение, использующее параметры грунта, инвариантные по отношению к параметрам штампа-деформатора:

$$\tau = \frac{1}{\frac{1}{\zeta C + p \operatorname{tg} \varphi} + \frac{t_{gr}}{jG}}, \quad (169)$$

где  $G$  — модуль сдвига,  $\zeta$  — вспомогательный параметр [1]  $\zeta = \begin{cases} 0, \frac{j}{t_{gr}} < K' \\ 1 - \frac{jm}{t_{gr}}, \frac{j}{t_{gr}} \geq K' \end{cases}$ .

Принято считать, что деформация сдвига  $j$  связана с горизонтальной координатой  $x$  и коэффициентом буксования движителя  $S$ , в самом простом случае зависимость линейна [1], [23]:

$$j = Sx. \quad (170)$$

После интегрирования зависимости (155) по  $x$  с использованием одного из выражений для  $\tau$  определяют коэффициент сцепления [1]:

$$\mu_T = \frac{F_T}{G_w}. \quad (171)$$

В работе [63] на основе выражения (169) получены инженерные зависимости, позволяющие оценить коэффициент сцепления лесных машин при работе на лесных почвогрунтах и грунтах.

Для колёсных движителей, работающих на лесных почвогрунтах, получена приближенная зависимость [23]:

$$\mu_T = \frac{0,385 E^{0,486} b^{0,110} t_{gr}^{0,132}}{S^{0,128} G_w^{0,0711} m^{0,266} v^{0,00980}}, \quad (172)$$

интервалы варьирования параметров модели те же, что и у зависимости (114).

Для малогабаритных колёсных движителей, работающих на слабонесущих грунтах, получена формула [18]:

$$\mu_T = 0,679 E^{0,500} b^{0,152} d^{0,146} S^{0,177} p_w^{-0,0770} G_w^{0,0628} \beta^{0,00249} v^{0,0247}, \quad (173)$$

интервалы варьирования параметров модели те же, что и у зависимости (113). Необходимо отметить работу Н. А. Иванова [39], в которой приводятся решения по перспективным конструкциям лёгких вездеходов, учитывающие взаимосвязи физико-механических свойств грунтов и тягово-сцепных свойств эластичного движителя.

Для гусеничных движителей, работающих на связных и несвязных грунтах, лесных почвогрунтах, получено уравнение [20]:

$$F_T = c_0 B^{c_1} l^{c_2} p_S^{c_3} p^{c_4} S^{c_5} t_{gr}^{c_6}, \quad (174)$$

где  $c_i$  — коэффициенты, зависящие от свойств грунта, интервалы варьирования параметров модели те же, что и у зависимости (114).

Сила сопротивления поступательному перемещению машины находится как интеграл нормального давления в зависимости от глубины колеи [1]:

$$F_R = \int_0^h b p d h . \quad (175)$$

Зависимости нормального давления от глубины колеи (осадки грунта) приведены в предыдущем разделе. В случаях, когда задана зависимость осадки  $h$  от давления  $p$ , при расчёте используется формула взятия интеграла по частям. После определения силы  $F_R$  рассчитывается коэффициент сопротивления движению [1]:

$$\varphi_R = \frac{F_R}{G_w} . \quad (176)$$

Поступательное движение машины возможно при неотрицательном значении коэффициента тяги [1]:

$$\varphi_P = \mu_T - \varphi_R \geq 0 . \quad (177)$$

В случаях, когда структура зависимости  $h(p)$ ,  $p(h)$  не позволяет получить замкнутое выражение интеграла по уравнению (175), например, при использовании формул (74), (90), (91), (105), пользуются численными методами интегрирования.

Для колёсных движителей, работающих на лесных почвогрунтах, в результате вычислительного эксперимента получена приближенная зависимость [23]:

$$\varphi_R = \frac{0,00342 p_w^{0,299} G_w^{1,171} \beta^{0,0589} t_{gr}^{0,0485} H_T^{0,0318}}{E^{1,242} S^{0,0299} b^{1,898} d^{1,0658} m^{0,0302} v^{0,0471}} , \quad (178)$$

интервалы варьирования параметров модели те же, что и у зависимости (114).

Для малогабаритных колёсных движителей, работающих на слабонесущих грунтах, получена формула [18]:

$$\varphi_R = 0,00418 p_w^{0,356} G_w^{1,496} \beta^{0,0949} E^{-1,961} b^{-2,0664} d^{-1,420} v^{0,0908} , \quad (179)$$

интервалы варьирования параметров модели те же, что и у зависимости (113).

Для гусеничных движителей, работающих на связных и несвязных грунтах, лесных почвогрунтах, получено уравнение [20]:

$$F_R = b_0 b^{b_1} l^{b_2} p_S^{b_3} p^{b_4} , \quad (180)$$

где  $b_i$  — коэффициенты, интервалы варьирования те же, что и у зависимости (114).

В рамках WES-метода также получены эмпирические модели, прогнозирующие тягово-сцепные свойства движителей:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_R = 0,04 + \frac{0,2}{N_{CI} - 2,5} \\ \mu_T = 0,84 - \frac{1,31}{N_{CI} - 2,45} + \frac{0,2}{N_{CI} - 2,5}, [114], [115] \\ \mu_P = 0,8 - \frac{1,31}{N_{CI} - 2,45} \end{array} \right. \quad (181)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_R = 0,04 + \frac{0,2}{N_{RCI} - 1,35} \\ \mu_T = 0,84 - \frac{1,31}{N_{RCI} - 0,95} + \frac{0,2}{N_{RCI} - 1,35}, [114], [115] \\ \mu_P = 0,8 - \frac{1,31}{N_{RCI} - 0,95} \end{array} \right. \quad (182)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_R = 0,04 + \frac{0,2}{N_{CI} - 1,5} \\ \mu_T = 1,55 - \frac{12,37}{N_{CI} + 5,94} + \frac{0,2}{N_{CI} - 1,5}, [114], [115] \\ \mu_P = 1,51 - \frac{12,37}{N_{CI} + 5,94} \end{array} \right. \quad (183)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_R = 0,04 + \frac{1,2}{N_C} \\ \mu_T = 0,75 \cdot [1 - \exp(-0,3N_C S)] \\ \mu_P = 0,75 \cdot [1 - \exp(-0,3N_C S)] - \left( 0,04 + \frac{1,2}{N_C} \right) \end{array} \right. , [90] \quad (184)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_R = 3 \cdot (1 + S_R) \cdot N_R^{-2,7} \\ \mu_T = 0,12 N_R^{0,88} \cdot [1 - 0,61 \cdot (1 - S_R)^4] + 3 \cdot (1 + S_R) \cdot N_R^{-2,7}, [92], [93] \\ \mu_P = 0,12 N_R^{0,88} \cdot [1 - 0,61 \cdot (1 - S_R)^4] \end{array} \right. \quad (185)$$

$$\mu_R = 0,28 \cdot \left( \frac{MMP}{CI} \right)^{1,95} + HG, [116] \quad (186)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_R = 0,07 + \frac{0,2}{N_{CI}} \\ \mu_T = 0,63 - \frac{0,27}{N_{CI}}, [117—120] \\ \mu_P = 0,56 - \frac{0,47}{N_{CI}} \end{array} \right. \quad (187)$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_R = 0,049 + \frac{0,287}{N_{CI}} \\ \mu_T = \left( 0,796 + \frac{0,92}{N_{CI}} \right) \cdot \{1 - \exp[-S \cdot (4,838 + 0,061N_{CI})]\} + \\ \quad + 0,049 + \frac{0,287}{N_{CI}} \\ \mu_P = \left( 0,796 + \frac{0,92}{N_{CI}} \right) \cdot \{1 - \exp[-S \cdot (4,838 + 0,061N_{CI})]\} \end{array} \right. , [117] \quad (188)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_R = \frac{1}{N_B} + 0,04 + \frac{0,05S_R}{N_B^{0,5}} \\ \mu_T = 0,88 \cdot [1 - \exp(-0,1N_B)] \cdot [1 - \exp(-7,5S_R)] + 0,04 \\ \mu_P = 0,88 \cdot [1 - \exp(-0,1N_B)] \cdot [1 - \exp(-7,5S_R)] - \\ \quad - \left( \frac{1}{N_B} + \frac{0,05S_R}{N_B^{0,5}} \right) \end{array} \right. , [121] \quad (189)$$

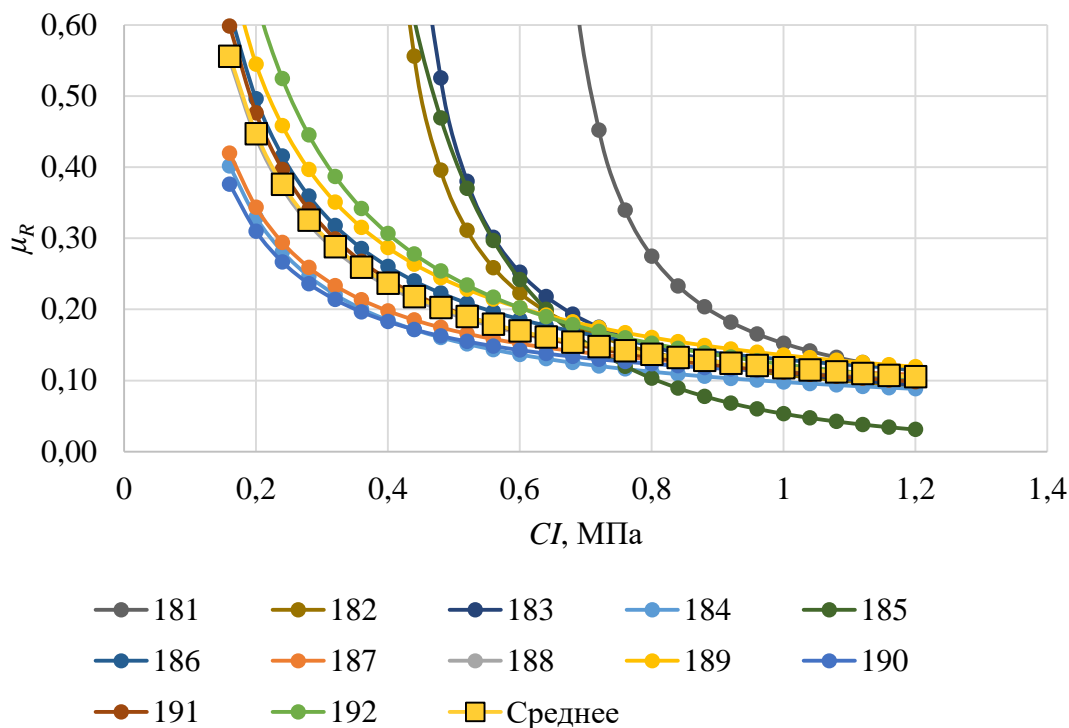
$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_R = -0,1 \cdot \left( \frac{G_W}{W_R} \right) + \frac{0,22}{N_C} + 0,20 \\ \mu_T = 0,47 \cdot [1 - \exp(-0,2N_C S_R)] + 0,28 \cdot \left( \frac{G_W}{W_R} \right) \\ \mu_P = 0,47 \cdot [1 - \exp(-0,2N_C S_R)] + 0,28 \cdot \left( \frac{G_W}{W_R} \right) - \\ \quad - \left( -0,1 \cdot \left( \frac{G_W}{W_R} \right) + \frac{0,22}{N_C} + 0,20 \right) \end{array} \right. , [122] \quad (190)$$

$$\mu_R = \frac{1,15}{N_C} + 0,06 \cdot \left( \frac{G_W}{W_R} \right), 359 \quad (191)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_R = 0,017 + \frac{0,453}{N_{CI}} \\ \mu_T = 0,817 - \frac{3,2}{N_{CI} + 1,91} + \frac{0,453}{N_{CI}} \\ \mu_P = 0,8 - \frac{3,2}{N_{CI} + 1,91} \end{array} \right. , [94] \quad (192)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_R = 0,36 \cdot [1 - \exp(-0,35N_{CC}S)] \\ \quad - 0,76 \cdot [1 - \exp(-0,07N_{CC}S)] \\ \mu_T = 0,36 \cdot [1 - \exp(-0,35N_{CC}S)] \\ \mu_P = 0,76 \cdot [1 - \exp(-0,07N_{CC}S)] \end{array} \right. \cdot [124] \quad (193)$$

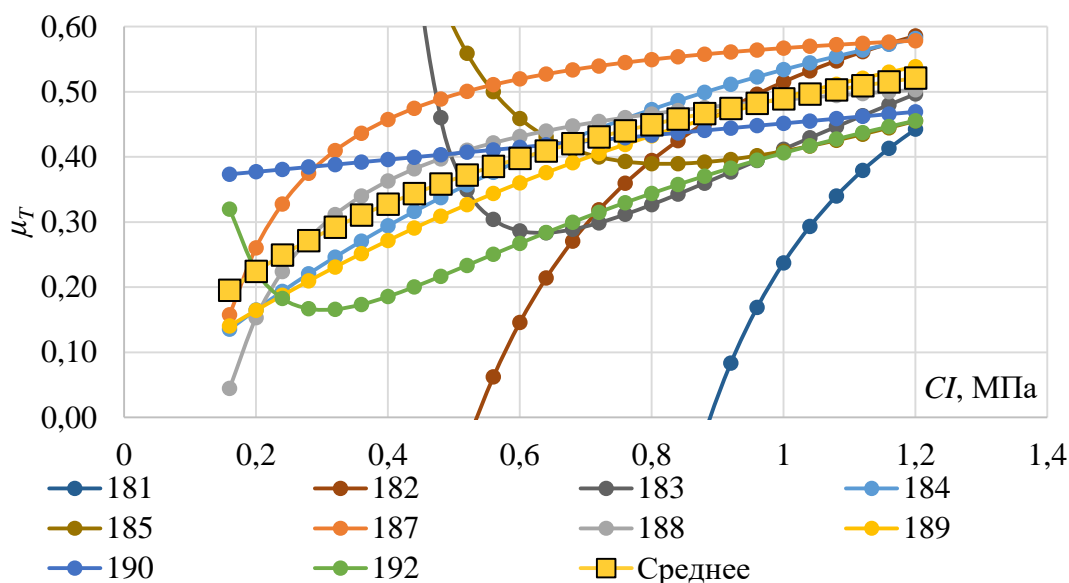
Результаты расчётов по формулам (181)—(193) при  $d = 1,333$  м,  $b = 0,7$  м,  $G_w = 45$  кН,  $h_z/H_T = 0,1$  представлены на рисунках 2—4.



**Рисунок 2.** Результаты расчёта коэффициента сопротивления с использованием *WES*-моделей

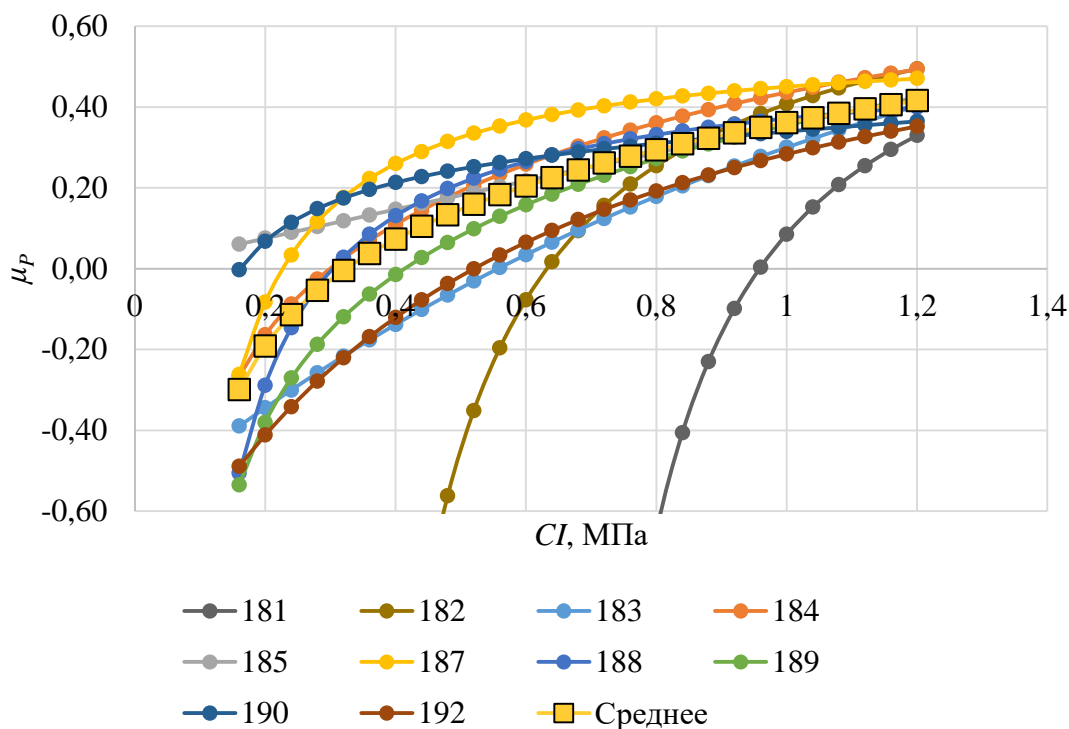
**Figure 2.** Results of calculating the rolling resistance coefficient using *WES*-models

Необходимо отметить ещё один подход к моделированию взаимодействия техники с грунтами, основанный на применении методов конечных элементов (МКЭ) [40], [107], [125—131]. С развитием вычислительных средств исследователи всё чаще используют его при решении задач механики контактного взаимодействия. Методы конечных элементов позволяют проводить расчёт напряжённо-деформированного состояния различных сред, находящихся под воздействием произвольно заданных нагрузок, не только распределённых по площади контакта, но и по объёму. Идея методов основывается на создании модели среды в виде совокупности отдельных конечных элементов, сведения по её состоянию под воздействием нагрузки получают на основе данных о состоянии отдельных элементов, сведения по её состоянию под воздействием нагрузки получают на основе данных о состоянии отдельных элементов, описываемых собственными матрицами жёсткости либо податливости.



**Рисунок 3.** Результаты расчёта коэффициента сцепления с использованием *WES*-моделей

**Figure 3.** The results of calculating the net thrust coefficient using *WES*-models



**Рисунок 4.** Результаты расчёта коэффициента тяги с использованием *WES*-моделей

**Figure 4.** The results of calculating the drawbar-pull coefficient using *WES*-models

На наш взгляд, несмотря на возможности, которые предоставляют методы конечных элементов исследователю, возникают следующие сложности:

1. Предпосылки методов конечных элементов предполагают решение упругой задачи при допущении о малости перемещений узлов конечных элементов. Проблема постепенно решается с развитием методов, разрабатываются новые типы конечных элементов, допускающие расчёт при больших смещениях узлов. Также последовательно рассматривают несколько конечно-элементных схем, «наследующих» данные о деформациях элементов от предыдущих.
2. В случае если создана расчётная схема, адекватно моделирующая поведение деформируемой среды, получаемое решение действительно только для заданной нагрузки, включающей как её величину, так и распределение.

#### 4. Обсуждение и заключение

Резюмируя, отметим, что к настоящему времени научное описание процессов взаимодействия движителей машин с опорными поверхностями, лесными почвами и грунтами, необходимое для повышения технологической эффективности и снижения экологических рисков работы лесозаготовительной техники в сложных и особо сложных почвенно-грунтовых условиях, не завершено. Как показал проведённый анализ представленных научных работ, дальнейшее развитие описания процессов взаимодействия движителей лесозаготовительной техники с опорными поверхностями целесообразно строить с использованием подхода, основанного на положении механики грунтов.

Следует отметить, что разработаны и апробированы подходы к моделированию взаимодействия движителей лесных и лесозаготовительных машин с однородными опорными поверхностями, свойства которых остаются неизменными в процессе взаимодействия с движителями; подходы, в основном, используют упругую постановку задачи о вдавливании штампа-деформатора в полупространство.

Накоплены эмпирические сведения по взаимодействию движителей машин с отдельными типами почв и грунтов. Предложены и апробированы подходы к получению практических зависимостей для определения показателей колееобразования и уплотнения почвогрунтов, тягово-цепных свойств движителей при работе на однородных опорных поверхностях с неизменными свойствами; подходы базируются на идее обработки результатов вычислительных экспериментов.

Сравнительно слабо проработаны вопросы оценки показателей взаимодействия движителей колёсных и гусеничных лесных машин с неоднородными опорными поверхностями (лесные почвогрунты и заболоченные грунты, вариативность свойств которых обусловлена слоистой структурой и неоднородностью плотности и влажности по глубине залегания слоёв), свойства которых могут изменяться непосредственно под воздействием движителя (например, снег, уплотнённый почвогрунт, почвогрунт лесосеки при многократном прохождении движителя по следу), при нелинейных взаимосвязях напряжения и деформации (возникающих при

существенных деформациях опорной поверхности и вследствие реологических свойств почв и грунтов, динамических эффектов при воздействии на них движителей машин).

### Список литературы

1. *Агейкин Я. С.* Проходимость автомобилей. М.: Машиностроение, 1981. 232 с.
2. *Бабков В. Ф., Бируля А. К., Сидеико В. М.* Проходимость колёсных машин по грунту. М.: Автотрансиздат, 1959. 189 с.
3. *Барахтанов Л. В., Беляков В. В., Кравец В. Н.* Проходимость автомобиля. Н. Новгород: НГТУ, 1996. 200 с.
4. *Божбов В. Е., Никифорова А. И., Григорьев Г. В., Дмитриева И. Н.* Обзор состояния вопроса и перспективных направлений исследований процессов взаимодействия лесных машин с почвогрунтами лесосек // Наука, образование, инновации в приграничном регионе: Материалы РНПК. Петрозаводск, 2015. С. 18—20.
5. *Водяник И. И.* Распределение давления тракторного колеса на почву // Механизация и электрификация сельского хозяйства. 1981. № 4. С. 44—46.
6. *Григорьев И. В.* Снижение отрицательного воздействия на почву колёсных трелёвочных тракторов обоснованием режимов их движения и технологического оборудования. СПб.: ЛТА, 2006. 236 с.
7. *Гуськов А. В.* Тягово-сцепные свойства и проходимость колёсного движителя по грунтам со слабой несущей способностью // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. 2008. № 2. С. 63—75.
8. *Гуськов В. В., Велев Н. Н., Атаманов Ю. Е., Бочаров Н. Ф., Ксенович И. П., Солонский А. С.* Тракторы: теория. М., 1988. 324 с.
9. *Ксенович И. П., Скотников В. А., Ляско М. И.* Ходовая система «почва — урожай». М.: Агропромиздат, 1985. 304 с.
10. *Ларин В. В.* Методы прогнозирования опорной проходимости многоосных колёсных машин на местности: Дис. ... д-ра техн. наук: 05.05.03. М., 2007. 530 с.
11. *Редькин А. К.* Основы моделирования и оптимизации процессов лесозаготовок. М.: Лесн. пром-сть, 1988. 256 с.
12. *Русанов В. А.* Проблемы переуплотнения почв движителями и эффективные пути её решения. М.: Изд-во ВИМ, 1998. 360 с.
13. *Скотников В. А., Пономарев А. В., Климанов А. В.* Проходимость машин. М.: Наука и техника, 1981. 328 с.
14. *Сюнёв В., Соколов А., Коновалов А., Катаров В., Селиверстов А., Герасимов Ю., Карвинен С., Вяльккю Э.* Сравнение технологий лесосечных работ в лесозаготовительных компаниях Республики Карелия. Йоэнсуу: НИИ Леса Финляндии, 2008. 126 с.
15. *Ширнин Ю. А., Онучин Е. М.* Имитационное моделирование движения многооперационной лесной машины // Лесной журнал. 2003. № 4. С. 510.
16. *Вольская Н. С., Агейкин Я. С., Чичекин И. В., Ширяев К. Н.* Методика определения глубины колеи под колёсами многоосной машины с учётом физико-механического состояния грунта // Журнал автомобильных инженеров. 2013. № 2 (79). С. 22—25.
17. *Божбов В. Е.* Повышение эффективности процесса трелёвки путём обоснования рейсовой нагрузки форвардеров: Автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.21.01. Архангельск, 2015. 20 с.
18. *Дмитриева М. Н.* Моделирование взаимодействия колёсного движителя малогабаритных лесных машин со слабонесущим грунтом: Дис. ... канд. техн. наук: 05.21.01. Воронеж, 2018. 129 с.

19. *Калистратов А. В.* Моделирование циклического уплотнения в задачах снижения негативного воздействия лесных машин на почвогрунт: Дис. ... канд. техн. наук: 05.21.01. СПб., 2015. 160 с.
20. *Лухминский В. А.* Совершенствование моделей и методов прогнозирования проходимости гусеничных лесных машин: Дис. ... канд. техн. наук: 05.21.01. СПб., 2018. 179 с.
21. *Песков В. Б.* Совершенствование моделей для оценки колееобразования и уплотнения почвогрунтов под воздействием движителей колёсных лесных машин: Дис. ... канд. техн. наук: 05.21.01. СПб., 2018. 190 с.
22. *Устинов В. В.* Оценка тягово-сцепных свойств колёсных движителей лесных машин методами теории движения автотранспорта по бездорожью: Автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.21.01. Архангельск, 2016. 20 с.
23. *Хахина А. М.* Методы прогнозирования и повышения проходимости колёсных лесных машин: Дис. ... д-ра техн. наук: 05.21.01. СПб., 2018. 318 с.
24. *Хитров Е. Г., Григорьев И. В., Хахина А. М.* Повышение эффективности трелёвки обоснованием показателей работы лесных машин при оперативном контроле свойств почвогрунта. СПб.: СПбГЛТУ, 2015. 152 с.
25. *Язов В. Н.* Воздействие лесных машин на многослойный массив почвогрунта: Автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.21.01. СПб., 2013. 20 с.
26. *Цытович Н. А.* Механика грунтов. М.: Высш. шк., 1983. 288 с.
27. *Анисимов Г. М., Большаков Б. М.* Новые концепции теории лесосечных машин. СПб.: ЛТА, 1998. 114 с.
28. *Базаров С. М., Барашков И. А., Никифорова А. И., Хахина А. М.* Математическая модель колееобразования в почвогрунтах под воздействием лесных машин // Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии. 2012. № 198. С. 86—95.
29. *Шатино В. Я., Григорьев И. В., Жукова А. И.* Оценка процессов деформирования почвы при циклическом уплотнении // Известия вузов. Лесной журнал. 2008. № 4. С. 7.
30. *Лепилин Д. В.* Оценка влияния поворотов трелёвочного трактора на уплотнение почвогрунтов лесосеки: Автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.21.01. Петрозаводск, 2011. 22 с.
31. *Хитров Е. Г.* Повышение эффективности трелёвки обоснованием показателей работы лесных машин при оперативном контроле свойств почвогрунта: Дис. ... канд. техн. наук: 05.21.01. СПб., 2015. 153 с.
32. *Бленд Д.* Теория линейной вязкоупругости. М.: Мир, 1965. 200 с.
33. *Хитров Е. Г., Хахина А. М., Дмитриева М. Н., Песков В. Б. и др.* Уточнённая модель для оценки тягово-сцепных свойств колёсного движителя лесной машины // Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии. 2016. № 217. С. 108—119.
34. *Андронов А. В.* Повышение эффективности трелёвки путём учёта энергонасыщенности колёсных сортиментоподборщиков: Автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.21.01. СПб., 2015. 141 с.
35. *Хитров Е. Г., Бартнев И. М.* Влияние угла поперечного наклона поверхности качения на тягово-сцепные свойства колёсного движителя // Лесотехнический журнал. 2016. № 4 (24). С. 225—232.
36. *Дмитриева М. Н., Лухминский В. А., Хахина А. М.* Математическая модель для расчёта глубины колеи при работе малогабаритного трелёвочного трактора // Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии. 2017. № 219. С. 144—155.
37. *Хитров Е. Г., Григорьев Г. В., Дмитриева И. Н., Ильющенко Д. А.* Расчёт конусного индекса по величине модуля деформации лесного почвогрунта // Системы. Методы. Технологии. 2014. № 4 (24). С. 127—131.

38. Хитров Е. Г., Хахина А. М., Григорьев И. В., Григорьева О. И. и др. Расчёт тягово-сцепных свойств колёсных лесных машин с использованием WES-метода // Лесотехнический журнал. 2016. № 3 (23). С. 196—202.
39. Иванов Н. А. Новые технологии лесопроизводства на базе экологически безопасной техники // Учёные заметки ТОГУ. 2016. № 4. С. 79—81.
40. Вольская Н. С., Жилейкин М. М., Захаров А. Ю., Панышин М. В. Квазиконечно-элементная модель качения эластичного колеса по неровностям деформируемого опорного основания при криволинейном движении колёсной машины // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2018. № 2 (36). С. 30—40.
41. Grigorev I., Burmistrova O., Stepanishcheva M., Gasparian G. The way to reduce ecological impact on forest soils caused by wood skidding // International Multidisciplinary Scientific GeoConference Surveying Geology and Mining Ecology Management. SGEM. 2014. P. 501—508.
42. Manukovsky A. Y., Grigorev I. V., Ivanov V. A., Gasparyan G. D., Lapshina M. L., Makarova Yu. A., Chetverikova I. V., Yakovlev K. A., Afonichev D. N., Kunitskaya O. A. Increasing the logging road efficiency by reducing the intensity of rutting: mathematical modeling // Journal of Mechanical Engineering Research and Developments. 2018. Vol. 41, no. 2. P. 35—41.
43. Zhuk A. Yu., Hahina A. M., Grigorev I. V., Ivanov V. A., Gasparyan G. D., Manukovsky A. Y., Kunitskaya O. A., Danilenko O. K., Grigoreva O. I. Modelling of indenter pressed into heterogeneous soil // Journal of Engineering and Applied Sciences. 2018. Vol. 13, no. S8. P. 6419—6430.
44. Cuong D. M., Zhu S., Ngoc N. T. Study on the variation characteristics of vertical equivalent damping ratio of tire-soil system using semi-empirical model // J. Terramech. 2014. No. 51. P. 67—80. <https://doi.org/10.1016/j.jterra.2013.10.002>.
45. Godbole R., Alcock R., Hettiaratchi D. The prediction of tractive performance on soil surfaces // J. Terramech. 1993. No. 30. P. 443—459. [https://doi.org/10.1016/0022-4898\(93\)90036-W](https://doi.org/10.1016/0022-4898(93)90036-W).
46. Irani R. A., Bauer R. J., Warkentin A. Modelling a single-wheel testbed for planetary rover applications // ASME 2010 Dynamic Systems and Control Conference. Cambridge, Massachusetts, USA, 2010. P. 181—188.10.1115/DSCC2010-4079.
47. Jain A., Balaram J., Cameron J., Guineau J., Lim C., Pomerantz M., Sohl G. Recent developments in the ROAMS planetary rover simulation Environment // IEEE Aerosp. Conf. Proc. 2004. Vol. 2. P. 861—876. 10.1109/AERO.2004.1367686.
48. Linstrom B. V., Els P. S., Botha T. R. A real-time non-linear vehicle preview model // Int. J. Heavy Veh. Syst. 2018. No. 25. P. 1—22. <https://doi.org/10.1504/IJHVS.2018.089893>.
49. Madsen J., Negrut D., Reid A., Seidl A., Ayers P., Bozdech G., Freeman J., O’Kins. A physics-based vehicle/terrain interaction model for soft soil off-road vehicle simulations // SAE Int. J. Commer. 2012. Veh. 5. P. 280—290. <https://doi.org/10.4271/2012-01-0767>.
50. Park W. Y., Chang Y. C., Lee S. S., Hong J. H., Park J. G., Lee K. S. Prediction of the tractive performance of a flexible tracked vehicle // J. Terramech. 2008. No. 45. P. 13—23. <https://doi.org/10.1016/j.jterra.2007.11.002>.
51. Rula A. A., Nuttall C. J. An Analysis of Ground Mobility Models (ANAMOB). Vicksburg, Mississippi, 1971.
52. Sandu C., Kolansky J., Botha T. R., Els P. S. Multibody dynamics techniques for real-time parameter estimation // Science for Peace and Security Series D: Information and Communication Security. IOS Press, 2015. P. 221—241.10.3233/978-1-61499-576-0-221.
53. Schreiber M., Kutzbach H. D. Influence of soil and tire parameters on traction // Res. Agric. Eng. 2008. No. 54. P. 43—49.

54. *Sloss D.* International society for terrain-vehicle systems standards // J. Terramech. 1977. No. 14. P. 153—182. [https://doi.org/10.1016/0022-4898\(77\)90013-1](https://doi.org/10.1016/0022-4898(77)90013-1).
55. *Smith W.* Modeling of Wheel-Soil Interaction for Small Ground Vehicles Operating on Granular Soil. University of Michigan, 2014.
56. *Taheri Sh., Sandu C., Taheri S., Pinto E., Gorsich D.* A technical survey on Terramechanics models for tire-terrain interaction used in modeling and simulation of wheeled vehicles // J. Terramech. 2015. No. 57. P. 1—22. <https://doi.org/10.1016/j.jterra.2014.08.003>.
57. *Tiwari V. K., Pandey K. P., Pranav P. K.* A review on traction prediction equations // J. Terramech. 2010. No. 47. P. 191—199. <https://doi.org/10.1016/j.jterra.2009.10.002>.
58. *Vantsevich V. V., Lozynskyy A., Demkiv L., Klos S.* A foundation for realtime tire mobility estimation and control // Proceedings of the 19th International & 14th European-African Regional Conference of the ISTVS. Budapest, Hungary, 2017.
59. *Yoshida K., Watanabe T., Mizuno N., Ishigami G.* Terramechanics-based analysis and traction control of a lunar/planetary rover // Springer Tracts Adv. Robot. 2006. No. 24. P. 225—234. [https://doi.org/10.1007/10991459\\_22](https://doi.org/10.1007/10991459_22).
60. ISO 22476-1:2012. Geotechnical investigation and testing — Field testing. Part 1: Electrical cone and piezocone penetration test. 2012.
61. *He R.* Review of terramechanics models and their applicability to real-time applications. 2019.
62. *Reece A. R.* Principles of soil-vehicle mechanics // Proc. Inst. Mech. Eng. Automob. Div. 1965. No. 180. P. 45—46. [https://doi.org/10.1243%2FPIME\\_AUTO\\_1965\\_180\\_009\\_02](https://doi.org/10.1243%2FPIME_AUTO_1965_180_009_02).
63. *Wong J. Y.* Terramechanics and Off-road Vehicle Engineering: Terrain Behaviour, Off-road Vehicle Performance and Design. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2009.
64. *Meirion-Griffith G., Spenko M.* A pressure-sinkage model for small-diameter wheels on compactive, deformable terrain // J. Terramech. 2013. No. 50. P. 37—44. <https://doi.org/10.1016/j.jterra.2012.05.003>.
65. *Plackett C. W.* A review of force prediction methods for off-road wheels // J. Agric. Eng. Res. 1985. No. 31. P. 1—29. [https://doi.org/10.1016/0021-8634\(85\)90122-2](https://doi.org/10.1016/0021-8634(85)90122-2).
66. *Gotteland P., Benoit O.* Sinkage tests for mobility study, modelling and experimental validation // J. Terramech. 2006. No. 43. P. 451—467. <https://doi.org/10.1016/j.jterra.2005.05.003>.
67. *Ding L., Gao H., Deng Z., Li Y., Liu G.* New perspective on characterizing pressure-sinkage relationship of terrains for estimating interaction mechanics // J. Terramech. 2014. No. 52. P. 57—76. <https://doi.org/10.1016/j.jterra.2014.03.001>.
68. *Lyasko M.* Multi-pass effect on off-road vehicle tractive performance // J. Terramech. 2010. No. 47. P. 275—294. <https://doi.org/10.1016/j.jterra.2010.05.006>.
69. *Saarilahti M.* Development of a protocol for ecoefficient wood harvesting on sensitive sites (Ecowood): Evaluation of the WES-method in assessing the trafficability of terrain and the mobility of forest tractors. University of Helsinki, Department of Forest Resource Management, 2002. 28 p.
70. *Gao H., Guo J., Ding L., Li N., Liu Z., Liu G., Deng Z.* Longitudinal skid model for wheels of planetary exploration rovers based on terramechanics // J. Terramech. 2013. No. 50. P. 327—343. <https://doi.org/10.1016/j.jterra.2013.10.001>.
71. *Turnage G. W.* Tire selection and performance prediction for off-road wheeled-vehicle operations // Proc. 4 th Int. Conf. Int. Soc. Terrain-Vehicle Systems, 1972.
72. *Turnage G. W.* Measuring soil properties in vehicle mobility research. Vicksburg, Mississippi, 1974.
73. *Apfelbeck M., Kuř S., Rebele B., Schafer B.* A systematic approach to reliably characterize soils based on Bevameter testing // J. Terramech. 2011. No. 48. P. 360—371. <https://doi.org/10.1016/j.jterra.2011.04.001>.



74. ASAE. Procedures for Using and Reporting Data Obtained with the Soil Cone Penetrometer, ASAE EP542 FEB1999 (R2013). American Society of Agricultural and Biological Engineers, St. Joseph, Michigan, 1999.
75. *Becker C. M., Els P. S.* Wheel force transducer measurements on a vehicle in transit // Proceedings of the 12 th European Regional Conference of the ISTVS. Pretoria, South Africa, 2012.
76. *Bishop A. W., Alpan I., Blight G. E., Donald I. B.* Factors controlling the strength of partly saturated cohesive soils // Boulder, CO. 1960. P. 503—532.
77. *Bolton M. D., Gui M. W., Phillips R.* Review of miniature soil probes for model tests // Eleventh Southeast Asian Geotechnical Conference. 1993. P. 85—90.
78. *Boon N. E., Yahya A., Kheiralla A. F., Wee B. S., Gew S. K.* A tractor-mounted, automated soil penetrometer-shearometer unit for mapping soil mechanical properties // Biosyst. Eng. 2005. No. 90. P. 381—396. <https://doi.org/10.1016/j.biosystemseng.2004.12.004>.
79. *Kogure K., Ohira Y., Yamaguchi H.* Prediction of sinkage and motion resistance of a tracked vehicle using plate penetration test // J. Terramech. 1983. No. 20. P. 121—128. [https://doi.org/10.1016/0022-4898\(83\)90043-5](https://doi.org/10.1016/0022-4898(83)90043-5).
80. *Massah J., Noorolahi S.* Design, development and performance evaluation of a tractor-mounted bevameter // Soil Tillage Res. 2010. No. 110. P. 161—166. <https://doi.org/10.1016/j.still.2010.07.002>.
81. *Matsuoka H., Liu S., Sun D., Nishikata U.* Development of a new in-situ direct shear test // Geotech. Test. J. 2001. No. 24. P. 92—102. <https://doi.org/10.1520/GTJ11285J>.
82. *Upadhyaya S. K., Wulfsohn D., Mehlschau J.* An instrumented device to obtain traction related parameters // J. Terramech. 1993. No. 30. P. 1—20. [https://doi.org/10.1016/0022-4898\(93\)90027-U](https://doi.org/10.1016/0022-4898(93)90027-U).
83. *Botha T. R., Els P. S.* Digital image correlation techniques for measuring tyre- road interface parameters. Part 1: Side-slip angle measurement on rough terrain // J. Terramech. 2015. No. 61. P. 87—100. <https://doi.org/10.1016/j.jterra.2015.04.004>.
84. *Guthrie A. G., Botha T. R., Jimenez E., Els P. S., Sandu C.* Dynamic 3D measurement of tyre-terrain interaction // 19 th International and 14th European-African Regional Conference of the ISTVS. Budapest, 2017.
85. *Li R., Li Y., Zhuang J.* Study on passing probability of automobile combination on soft ground // Proceedings of the 10 th International ISTVS Conference, Kobe, Japan, August 20—24 1990. 1990. Vol. II. P. 349—358.
86. *McAllister M.* Reduction in the rolling resistance of tyres for trailed agricultural machinery // Journal of agricultural engineering research. 1983. No. 28. P. 127—137.
87. *McKyes E., Fan T.* Multiplate penetration tests to determine soil stiffness moduli // J. Terramech. 1985. No. 22. P. 157—162. [https://doi.org/10.1016/0022-4898\(85\)90050-3](https://doi.org/10.1016/0022-4898(85)90050-3).
88. *Paul T.* Performance prediction of pneumatic tyres on sand // Proceedings of the 8th International ISTVS Conference. Cambridge, UK, 6—10 July 1984. 1984. Vol. I. P. 87—96.
89. *Vechinski C.* Evaluation of an empirical traction equation for forestry tires // Proceedings of the 11 th International ISTVS Conference, Lake Tahoe, Nevada, USA, September 27—30 1993. 1993. No. 1. P. 265—273.
90. *Wismer R. D., Luth H. J.* Off-road traction prediction for wheeled vehicles // Transaction ASAE. 1973. No. 17 (1). P. 8—10.
91. *Freitag D. R.* A dimensional analysis of the performance of pneumatic tires on clay // Journal of Terramechanics. 1966. No. 3 (3). P. 51—68.
92. *Rowland D.* Tracked vehicle ground pressure and its effect on soft ground performance // Proceedings of the 4 th International ISTVS Conference. April 24—28 1972. Stockholm; Kiruna, Sweden. 1972. Vol. I. P. 353—384.

93. Rowland D., Peel J. W. Soft ground performance prediction and assessment for wheeled and tracked vehicles. Institute of mechanical engineering, 1975. 581 p.
94. Maclaurin E. B. The use of mobility numbers to predict the tractive performance of wheeled and tracked vehicles in soft cohesive soils // Proceedings of the 7 th European ISTVS Conference. 8—10 October 1997. Ferrara, Italy, 1997. P. 391—398.
95. Rummukainen A., Ala-Ilomäki J. Manoeuvrability of forwarders and its prediction on peatlands // ISTVS, Third European conference. ISTVS, Third European conference. Off the road vehicles and machinery in agriculture, earthwork and forestry. 15—17 September 1986. Warsaw, Poland, 1986. Vol. II. P. 75—81.
96. Anttila T. Metsämaan raiteistumisen ennustaminen WES-menetelmää käyttäen. University of Helsinki, Department of forest resource management. Publications 17, 1998. 853 p.
97. Rantala M. Metsämaan raiteistumisherkkyyden ennustamismenetelmien vertailu käytännön puunkorjuuoloissa. Helsingin yliopisto, Metsävarojen käytön laitos. Metsäteknologian tutkielma MMM-tutkintoa varten, 2001.
98. Priddy J. D., Willoughby W. E. Clarification of vehicle cone index with reference to mean maximum pressure // J. Terramechanics. 2006. Vol. 43, no. 2. P. 85—96.
99. Khitrov E., Kochnev A., Ivanov V., Stepanishcheva M. Linking the deformation moduli and cone indices of forest and peatland soils // International Multidisciplinary Scientific GeoConference Surveying Geology and Mining Ecology Management, SGEM. 2018. No. 18. P. 297—304.
100. Khitrov E. G., Andronov A. V., Martynov B. G., Spiridonov S. V. Interrelations of various soil types mechanical properties. Interrelations of various soil types mechanical properties // Journal of Physics: Conference Series. 2019. P. 012—032.
101. Williams R. C., Prowell B. Comparison of Laboratory Wheel-Tracking Test Results with WES Track Performance // Transportation Research Record. 1990. P. 121—128.
102. Abebe A., Tanaka T., Yamazaki M. Soil compaction by multiple passes of a rigid wheel relevant for optimization of traffic // Journal of Terramechanics. 1996. No. 26 (2). P. 139—148.
103. Bekker M. G. Introduction to Terrain-Vehicle Systems. University of Michigan, Ann Arbor, Michigan, 1969.
104. Oida, A. Study on equation of shear stress-displacement curves. // J. Jpn. Soc. Agric. Mach. 1975, No. 37, P. 20—25.
105. Sela A. D., Ehrlich I. R. Load support capability of flat plates of various shapes in soils // J. Terramech. 1972. No. 8. P. 39—69. [https://doi.org/10.1016/0022-4898\(72\)90094-8](https://doi.org/10.1016/0022-4898(72)90094-8).
106. Senatore C., Iagnemma K. Direct shear behaviour of dry, granular soils for low normal stress with application to lightweight robotic vehicle modeling // Proceedings of the 17 th ISTVS International Conference. Blacksburg, Virginia, 2011.
107. Baker R. Nonlinear mohr envelopes based on triaxial data // J. Geotech. Geoenviron. Eng. 2004. No. 130. P. 498—506. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(2006\)132:1\(130\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(2006)132:1(130)).
108. Cerato A. B., Luttenegger A. J. Specimen size and scale effects of direct shear box tests of sands // Geotech. Test. J. 2006. No. 29. P. 507—516. <https://doi.org/10.1520/GTJ100312>.
109. Gan J. K. M., Fredlund D. G., Rahardjo H. Determination of the shear strength parameters of an unsaturated soil using the direct shear test // Can. Geotech. J. 1988. No. 25. P. 500—510. <https://doi.org/10.1139/t88-055>.
110. Guo P. Modified direct shear test for anisotropic strength of sand // J. Geotech. Geoenviron. Eng. 2008. No. 134. P. 1311—1318. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(2008\)134:9\(1311\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(2008)134:9(1311)).
111. Peterson R. W. Interpretation of triaxial compression test results on partially saturated soils // Adv. Triaxial Test Soil Rock. ASTM STP 977. 1988. P. 512—538. <https://doi.org/10.1520/STP29096S>.

112. *Rahardjo H., Heng O. B., Choon L. E.* Shear strength of a compacted residual soil from consolidated drained and constant water content triaxial tests // *Can. Geotech. J.* 2004. No. 41. P. 421—436. <https://doi.org/10.1139/t03-093>.
113. *Sun D., Yao Y. P., Matsuoka H.* Modification of critical state models by Mohr- Coulomb criterion // *Mech. Res. Commun.* 2006. No. 33. P. 217—232. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2005.05.006>.
114. *Turnage G. W.* Prediction of in-sand tire and wheeled vehicle drawbar performance // *Proceedings of the 8th International ISTVS Conference.* Cambridge, UK, 6—10 July 1984. 1984. Vol. I. P. 121—150.
115. *Turnage G. W.* Using dimensionless prediction terms to describe off-road wheel vehicle performance // *ASAE Paper.* 1972. No. 72-634.
116. *Larminie J. C.* Standards for mobility requirements of military vehicles // *Journal of Terramechanics.* 1988. No. 25 (3). P. 171—189.
117. *Dwyer M.* Tractive performance of a wide, low-pressure tyre compared with conventional tractor drive tyres // *Journal of terramechanics.* 1987. No. 24 (3). P. 227—234.
118. *Gee-Clough D., McAllister M., Pearson G., Evernden D.* The empirical prediction of tractor-implement field performance // *Journal of terramechanics.* 1978. No. 15 (2). P. 81—94.
119. *Gee-Clough D.* The Bekker theory of rolling resistance amended to take account of skid and deep sinkage // *J. Terramech.* 1976. No. 13. P. 87—105. [https://doi.org/10.1016/0022-4898\(76\)90016-1](https://doi.org/10.1016/0022-4898(76)90016-1).
120. *Gee-Clough D., Sommer M. S.* Steering forces on undriven, angled wheels // *J. Terramech.* 1981. No. 18. P. 25—49. [https://doi.org/10.1016/0022-4898\(81\)90016-1](https://doi.org/10.1016/0022-4898(81)90016-1).
121. *Brixius W. W.* Traction prediction equations for bias ply tires // *ASAE paper.* 1987. No. 87-1622.
122. *Ashmore C., Burt C., Turner J.* An empirical equation for predicting tractive performance of log-skidder tires // *Transactions of the ASAE.* 1987. No. 30 (5). P. 1231—1236.
123. *Rummer R., Ashmore C.* Factors affecting the rolling resistance of rubber-tired skidders // *ASAE Paper.* 1985. No. 85-1611. 15 p.
124. *Sharma K. A., Pandley K. P.* Matching tyre size to weight, speed and power available for maximising pulling ability of agricultural tractors // *Journal of terramechanics.* 2001. No. 28 (2). P. 71—88.
125. *Chiroux R. C. et al.* Three-dimensional finite element analysis of soil interaction with a rigid wheel // *Appl. Math. Comput.* 2005. No. 162. P. 707—722.
126. *Cueto O. G., Coronel C. E. I., Bravo E. L., Morfa C. A. R., Suárez M. H.* Modelling in FEM the soil pressures distribution caused by a tyre on a Rhodic Ferralsol soil // *J. Terramechanics.* 2016. Vol. 63. P. 61—67.
127. *Cueto O., Coronel C., Bravo E., Morfa C. A. R., Suárez M. H.* Modelling in FEM the soil pressures distribution caused by a tyre on a Rhodic Ferralsol soil // *Journal of Terramechanics.* 2015. No. 63. [10.1016/j.jterra.2015.09.003](https://doi.org/10.1016/j.jterra.2015.09.003).
128. *Fervers C. W.* Improved FEM simulation model for tire-soil interaction // *J. Terramechanics.* 2004. No. 41. P. 87—100.
129. *Letherwood D. M., Jayakumar Paramsothy Li Guangbu Contreras U., D Foster C., A Shabana A.* Comparison between a terramechanics model and a continuum soil model implemented within the absolute nodal coordinate formulation // *6 th Asian Conference on Multibody Dynamics.* 2012.
130. *Li Hao Schindler C.* Analysis of soil compaction and tire mobility with finite element method // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part K: Journal of Multi-body Dynamics.* 2013. No. 227. P. 275—291.

131. Xia K. Finite element modeling of tire/terrain interaction: Application to predicting soil compaction and tire mobility // J. Terramechanics. 2011. Vol. 48, no. 2. P. 113—123.

## References

1. Ageikin Ia. S. *Passage of cars*. Moscow, Mashinostroenie, 1981. 232 p. (In Russ.)
2. Babkov V. F., Birulia A. K., Sideiko V. M. *Ground passability of wheeled vehicles*. Moscow, Avtotransizdat, 1959. 189 p. (In Russ.)
3. Barakhtanov L. V., Beliakov V. V., Kravets V. N. *Passage of the car*. N. Novgorod, NGTU, 1996. 200 p. (In Russ.)
4. Bozhbov V. E., Nikiforova A. I., Grigorev G. V., Dmitrieva I. N. A review of the state of the art and promising directions of research of the processes of interaction of forest machines with soils of cutting areas. *Nauka, obrazovanie, innovatsii v prigranichnom regione. Materialy RNPk*. Petrozavodsk, 2015, pp. 18—20. (In Russ.)
5. Vodianik I. I. Distribution of the tractor wheel pressure on the ground. *Mekhanizatsiia I elektrifikatsiia selskogo khoziaistva*, 1981, no. 4, pp. 44—46. (In Russ.)
6. Grigorev I. V. *Reducing the negative impact on the soil of wheeled skidders by justifying the modes of their movement and technological equipment*. St. Petersburg, LTA, 2006. 236 p. (In Russ.)
7. Guskov A. V. Traction and adhesion properties and permeability of the wheel propeller on soils with weak bearing capacity. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N. E. Baumana*, 2008, no. 2, pp. 63—75. (In Russ.)
8. Guskov V. V., Velev N. N., Atamanov Iu. E., Bocharov N. F., Ksenevich I. P., Solonskii A. S. *Tractors: theory*. Moscow, 1988. 324 p. (In Russ.)
9. Ksenevich I. P., Skotnikov V. A., Liasko M. I. *Running system «soil — harvest»*. Moscow, Agropromizdat, 1985. 304 p. (In Russ.)
10. Larin V. V. *Methods for predicting the support cross-country ability of multi-axle wheeled vehicles on the ground*. Doct. Diss. Moscow, 2007. 530 p. (In Russ.)
11. Redkin A. K. *Fundamentals of Modeling and Optimization of Logging Processes*. Moscow, Lesnaia promyshlennost, 1988. 256 p. (In Russ.)
12. Rusanov V. A. *Problems of soil overconsolidation by propellers and effective ways to solve it*. Moscow, Izd-vo VIM, 1998. 360 p. (In Russ.)
13. Skotnikov V. A., Ponomarev A. V., Klimanov A. V. *Passage of cars*. Moscow, Nauka i tekhnika, 1981. 328 p. (In Russ.)
14. Siunev V., Sokolov A., Konovalov A., Katarov V., Seliverstov A., Gerasimov Iu., Karvinen P., Vialkku E. *Comparison of logging technologies in logging companies of the Republic of Karelia*. Joensuu, NII Lesa Finliandii, 2008. 126 p. (In Russ.)
15. Shirnin Iu. A., Onuchin E. M. Simulation of the motion of a multi-operation forestry machine. *Lesnoi zhurnal*, 2003, no. 4, pp. 510. (In Russ.)
16. Volskaia N. S., Ageikin Ia. S., Chichekin I. V., Shiriaev K. N. Method for determining the depth of the track under the wheels of a multi-axle vehicle, taking into account the physical and mechanical state of the soil. *Zhurnal avtomobilnykh inzhenerov*, 2013, no. 2 (79), pp. 22—25. (In Russ.)
17. Bozhbov V. E. *Improving the efficiency of the skidding process by justifying the voyage load of forwarders*. Author. Kand. Diss. Arkhangel'sk, 2015. 20 p. (In Russ.)
18. Dmitrieva M. N. *Modeling the interaction of a wheeled mover of small-sized forest machines with a weak-bearing soil*. Kand. Diss. Voronezh, 2018. 129 p. (In Russ.)
19. Kalistratov A. V. *Modeling of cyclic compaction in the tasks of reducing the negative impact of forest machines on soil*. Kand. Diss. St. Petersburg, 2015. 160 p. (In Russ.)

20. Lukhminskii V. A. *Improvement of models and methods for predicting the patency of tracked forest machines*. Kand. Diss. St. Petersburg, 2018. 179 p. (In Russ.)
21. Peskov V. B. *Improving models for assessing rutting and soil compaction under the influence of propellers of wheeled forest machines*. Kand. Diss. St. Petersburg, 2018. 190 p. (In Russ.)
22. Ustinov V. V. *Estimation of traction and coupling properties of wheel propellers of forest machines by methods of the theory of off-road vehicle movement*. Author. Kand. Diss. Arkhangelsk, 2016. 20 p. (In Russ.)
23. Khakhina A. M. *Methods for forecasting and increasing the cross-country ability of wheeled forest machines*. Doct. Diss. St. Petersburg, 2018. 318 p. (In Russ.)
24. Khitrov E. G., Grigorev I. V., Khakhina A. M. *Improving the efficiency of skidding by justifying the performance of forest machines during the operational control of soil properties*. St. Petersburg, SPbGLTU, 2015. 152 p. (In Russ.)
25. Iazov V. N. *The impact of forest machines on a multilayer soil massif*. Author. Kand. Diss. St. Petersburg, 2013. 20 p. (In Russ.)
26. Tsytovich N. A. *Soil mechanics*. Moscow, Vysshaya shkola, 1983. 288 p. (In Russ.)
27. Anisimov G. M., Bolshakov B. M. *New concepts in the theory of cutting machines*. St. Petersburg, LTA, 1998. 114 p. (In Russ.)
28. Bazarov S. M., Barashkov I. A., Nikiforova A. I., Khakhina A. M. Mathematical model of rutting in soil under the influence of forest machines. *Izvestiia Sankt-Peterburgskoi lesotekhnicheskoi akademii*, 2012, no. 198, pp. 86—95. (In Russ.)
29. Shapiro V. Ia., Grigorev I. V., Zhukova A. I. Assessment of soil deformation processes during cyclic compaction. *Izvestiia vuzov. Lesnoi zhurnal*, 2008, no. 4, pp. 7. (In Russ.)
30. Lepilin D. V. *Assessment of the influence of turns of the skidder on the compaction of soil in the cutting area*. Author. Kand. Diss. Petrozavodsk, 2011. 22 p. (In Russ.)
31. Khitrov E. G. *Improving the efficiency of skidding by justifying the performance of forest machines in the operational control of soil properties*. Kand. Diss. St. Petersburg, 2015. 153 p. (In Russ.)
32. Blend D. *Linear viscoelasticity theory*. Moscow, Mir, 1965. 200 p. (In Russ.)
33. Khitrov E. G., Khakhina A. M., Dmitrieva M. N., Peskov V. B. i dr. A refined model for assessing the traction-coupling properties of a wheel propeller of a forest machine. *Izvestiia Sankt-Peterburgskoi lesotekhnicheskoi akademii*, 2016, no. 217, pp. 108—119. (In Russ.)
34. Andronov A. V. *Improving the efficiency of skidding by taking into account the energy saturation of wheeled assortment pickers*. Author. Kand. Diss. St. Petersburg, 2015. 141 p. (In Russ.)
35. Khitrov E. G., Bartenev I. M. The influence of the angle of the lateral inclination of the rolling surface on the traction-coupling properties of the wheel propeller. *Lesotekhnicheskii zhurnal*, 2016, no. 4 (24), pp. 225—232. (In Russ.)
36. Dmitrieva M. N., Lukhminskii V. A., Khakhina A. M. Mathematical model for calculating the track depth when operating a small skidder. *Izvestiia Sankt-Peterburgskoi lesotekhnicheskoi akademii*, 2017, no. 219, pp. 144—155. (In Russ.)
37. Khitrov E. G., Grigorev G. V., Dmitrieva I. N., Iliushenko D. A. Calculation of the cone index based on the deformation modulus of the forest soil. *Sistemy. Metody. Tekhnologii*, 2014, no. 4 (24), pp. 127—131. (In Russ.)
38. Khitrov E. G., Khakhina A. M., Grigorev I. V., Grigoreva O. I. i dr. Calculation of the traction-coupling properties of wheeled forest machines using the WES-method. *Lesotekhnicheskii zhurnal*, 2016, no. 3 (23), pp. 196—202. (In Russ.)
39. Ivanov N. A. New technologies for forest products based on environmentally friendly technology. *Uchenye zametki TOGU*, 2016, no. 4, pp. 79—81. (In Russ.)
40. Volskaia N. S., Zhileikin M. M., Zakharov A. Iu., Panshin M. V. Quasi-finite-element model of the rolling of an elastic wheel along the unevenness of a deformable support base during

- curved motion of a wheeled vehicle. *Izvestiia Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta MAMI*, 2018, no. 2 (36), pp. 30—40. (In Russ.)
41. Grigorev I., Burmistrova O., Stepanishcheva M., Gasparian G. The way to reduce ecological impact on forest soils caused by wood skidding. *International Multidisciplinary Scientific GeoConference Surveying Geology and Mining Ecology Management. SGEM*, 2014, pp. 501—508.
  42. Manukovsky A. Y., Grigorev I. V., Ivanov V. A., Gasparyan G. D., Lapshina M. L., Makarova Yu. A., Chetverikova I. V., Yakovlev K. A., Afonichev D. N., Kunitskaya O. A. Increasing the logging road efficiency by reducing the intensity of rutting: mathematical modeling. *Journal of Mechanical Engineering Research and Developments*, 2018, vol. 41, no. 2, pp. 35—41.
  43. Zhuk A. Yu., Hahina A. M., Grigorev I. V., Ivanov V. A., Gasparyan G. D., Manukovsky A. Y., Kunitskaya O. A., Danilenko O. K., Grigoreva O. I. Modelling of indenter pressed into heterogeneous soil. *Journal of Engineering and Applied Sciences*, 2018, vol. 13, no. S8, pp. 6419—6430.
  44. Cuong D. M., Zhu S., Ngoc N. T. Study on the variation characteristics of vertical equivalent damping ratio of tire-soil system using semi-empirical model. *J. Terramech.*, 2014, no. 51, pp. 67—80. <https://doi.org/10.1016/j.jterra.2013.10.002>.
  45. Godbole R., Alcock R., Hettiaratchi D. The prediction of tractive performance on soil surfaces. *J. Terramech.*, 1993, no. 30, pp. 443—459. [https://doi.org/10.1016/0022-4898\(93\)90036-W](https://doi.org/10.1016/0022-4898(93)90036-W).
  46. Irani R. A., Bauer R. J., Warkentin A. Modelling a single-wheel testbed for planetary rover applications. *ASME 2010 Dynamic Systems and Control Conference*. Cambridge, Massachusetts, USA, 2010, pp. 181—188. [10.1115/DSCC2010-4079](https://doi.org/10.1115/DSCC2010-4079).
  47. Jain A., Balaram J., Cameron J., Guineau J., Lim C., Pomerantz M., Sohl G. Recent developments in the ROAMS planetary rover simulation Environment. *IEEE Aerosp. Conf. Proc.*, 2004, vol. 2, pp. 861—876. [10.1109/AER0.2004.1367686](https://doi.org/10.1109/AER0.2004.1367686).
  48. Linstrom B. V., Els P. S., Botha T. R. A real-time non-linear vehicle preview model. *Int. J. Heavy Veh. Syst.*, 2018, no. 25, pp. 1—22. <https://doi.org/10.1504/IJHVS.2018.089893>.
  49. Madsen J., Negrut D., Reid A., Seidl A., Ayers P., Bozdech G., Freeman J., O’Kins. A physics-based vehicle/terrain interaction model for soft soil off-road vehicle simulations. *SAE Int. J. Commer.*, 2012, veh. 5, pp. 280—290. <https://doi.org/10.4271/2012-01-0767>.
  50. Park W. Y., Chang Y. C., Lee S. S., Hong J. H., Park J. G., Lee K. S. Prediction of the tractive performance of a flexible tracked vehicle. *J. Terramech.*, 2008, no. 45, pp. 13—23. <https://doi.org/10.1016/j.jterra.2007.11.002>.
  51. Rula A. A., Nuttall C. J. *An Analysis of Ground Mobility Models (ANAMOB)*. Vicksburg, Mississippi, 1971.
  52. Sandu C., Kolansky J., Botha T. R., Els P. S. *Multibody dynamics techniques for real-time parameter estimation. Science for Peace and Security Series D: Information and Communication Security*. IOS Press, 2015, pp. 221—241. [10.3233/978-1-61499-576-0-221](https://doi.org/10.3233/978-1-61499-576-0-221).
  53. Schreiber M., Kutzbach H. D. Influence of soil and tire parameters on traction. *Res. Agric. Eng.*, 2008, no. 54, pp. 43—49.
  54. Sloss D. International society for terrain-vehicle systems standards. *J. Terramech.*, 1977, no. 14, pp. 153—182. [https://doi.org/10.1016/0022-4898\(77\)90013-1](https://doi.org/10.1016/0022-4898(77)90013-1).
  55. Smith W. *Modeling of Wheel-Soil Interaction for Small Ground Vehicles Operating on Granular Soil*. University of Michigan, 2014.
  56. Taheri Sh., Sandu C., Taheri S., Pinto E., Gorsich D. A technical survey on Terramechanics models for tire-terrain interaction used in modeling and simulation of wheeled vehicles. *J. Terramech.*, 2015, no. 57, pp. 1—22. <https://doi.org/10.1016/j.jterra.2014.08.003>.

57. Tiwari V. K., Pandey K. P., Pranav P. K. A review on traction prediction equations. *J. Terramech.*, 2010, no. 47, pp. 191—199. <https://doi.org/10.1016/j.jterra.2009.10.002>.
58. Vantsevich V. V., Lozynskyy A., Demkiv L., Klos S. A foundation for realtime tire mobility estimation and control. *Proceedings of the 19th International & 14th European-African Regional Conference of the ISTVS*. Budapest, Hungary, 2017.
59. Yoshida K., Watanabe T., Mizuno N., Ishigami G. Terramechanics-based analysis and traction control of a lunar/planetary rover. *Springer Tracts Adv. Robot*, 2006, no. 24, pp. 225—234. [https://doi.org/10.1007/10991459\\_22](https://doi.org/10.1007/10991459_22).
60. ISO 22476-1:2012. *Geotechnical investigation and testing — Field testing. Part 1: Electrical cone and piezocone penetration test*. 2012.
61. He R. *Review of terramechanics models and their applicability to real-time applications*. 2019.
62. Reece A. R. Principles of soil-vehicle mechanics. *Proc. Inst. Mech. Eng. Automob. Div.*, 1965, no. 180, pp. 45—46. [https://doi.org/10.1243/PIME\\_AUTO\\_1965\\_180\\_009\\_02](https://doi.org/10.1243/PIME_AUTO_1965_180_009_02).
63. Wong J. Y. *Terramechanics and Off-road Vehicle Engineering: Terrain Behaviour, Off-road Vehicle Performance and Design*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2009.
64. Meirion-Griffith G., Spenko M. A pressure-sinkage model for small-diameter wheels on compactive, deformable terrain. *J. Terramech.*, 2013, no. 50, pp. 37—44. <https://doi.org/10.1016/j.jterra.2012.05.003>.
65. Plackett C. W. A review of force prediction methods for off-road wheels. *J. Agric. Eng. Res.*, 1985, no. 31, pp. 1—29. [https://doi.org/10.1016/0021-8634\(85\)90122-2](https://doi.org/10.1016/0021-8634(85)90122-2).
66. Gotteland P., Benoit O. Sinkage tests for mobility study, modelling and experimental validation. *J. Terramech.*, 2006, no. 43, pp. 451—467. <https://doi.org/10.1016/j.jterra.2005.05.003>.
67. Ding L., Gao H., Deng Z., Li Y., Liu G. New perspective on characterizing pressure-sinkage relationship of terrains for estimating interaction mechanics. *J. Terramech.*, 2014, no. 52, pp. 57—76. <https://doi.org/10.1016/j.jterra.2014.03.001>.
68. Lyasko M. Multi-pass effect on off-road vehicle tractive performance. *J. Terramech.*, 2010, no. 47, pp. 275—294. <https://doi.org/10.1016/j.jterra.2010.05.006>.
69. Saarilahti M. *Development of a protocol for ecoefficient wood harvesting on sensitive sites (Ecowood): Evaluation of the WES-method in assessing the trafficability of terrain and the mobility of forest tractors*. University of Helsinki, Department of Forest Resource Management, 2002. 28 p.
70. Gao H., Guo J., Ding L., Li N., Liu Z., Liu G., Deng Z. Longitudinal skid model for wheels of planetary exploration rovers based on terramechanics. *J. Terramech.*, 2013, no. 50, pp. 327—343. <https://doi.org/10.1016/j.jterra.2013.10.00101>.
71. Turnage G. W. Tire selection and performance prediction for off-road wheeled-vehicle operations. *Proc. 4th Int. Conf. Int. Soc. Terrain-Vehicle Systems*. 1972.
72. Turnage G. W. *Measuring soil properties in vehicle mobility research*. Vicksburg, Mississippi, 1974.
73. Apfelbeck M., Kuř S., Rebele B., Schafer B. A systematic approach to reliably characterize soils based on Bevameter testing. *J. Terramech.*, 2011, no. 48, pp. 360—371. <https://doi.org/10.1016/j.jterra.2011.04.001>.
74. ASAE. *Procedures for Using and Reporting Data Obtained with the Soil Cone Penetrometer, ASAE EP542 FEB1999 (R2013)*. American Society of Agricultural and Biological Engineers, St. Joseph, Michigan, 1999.
75. Becker C. M., Els P. S. Wheel force transducer measurements on a vehicle in transit. *Proceedings of the 12th European Regional Conference of the ISTVS*. Pretoria, South Africa, 2012.
76. Bishop A. W., Alpan I., Blight G. E., Donald I. B. Factors controlling the strength of partly saturated cohesive soils. *Boulder, CO*, 1960, pp. 503—532.

77. Bolton M. D., Gui M. W., Phillips R. Review of miniature soil probes for model tests. *Eleventh Southeast Asian Geotechnical Conference*, 1993, pp. 85—90.
78. Boon N. E., Yahya A., Kheiralla A. F., Wee B. S., Gew S. K. A tractor-mounted, automated soil penetrometer-shearometer unit for mapping soil mechanical properties. *Biosyst. Eng.*, 2005, no. 90, pp. 381—396. <https://doi.org/10.1016/j.biosystemseng.2004.12.004>.
79. Kogure K., Ohira Y., Yamaguchi H. Prediction of sinkage and motion resistance of a tracked vehicle using plate penetration test. *J. Terramech.*, 1983, no. 20, pp. 121—128. [https://doi.org/10.1016/0022-4898\(83\)90043-5](https://doi.org/10.1016/0022-4898(83)90043-5).
80. Massah J., Noorolahi S. Design, development and performance evaluation of a tractor-mounted bevameter. *Soil Tillage Res.*, 2010, no. 110, pp. 161—166. <https://doi.org/10.1016/j.still.2010.07.002>.
81. Matsuoka H., Liu S., Sun D., Nishikata U. Development of a new in-situ direct shear test. *Geotech. Test. J.*, 2001, no. 24, pp. 92—102. <https://doi.org/10.1520/GTJ11285J>.
82. Upadhyaya S. K., Wulfsohn D., Mehlschau J. An instrumented device to obtain traction related parameters. *J. Terramech.*, 1993, no. 30, pp. 1—20. [https://doi.org/10.1016/0022-4898\(93\)90027-U](https://doi.org/10.1016/0022-4898(93)90027-U).
83. Botha T. R., Els P. S. Digital image correlation techniques for measuring tyre- road interface parameters. *Part 1: Side-slip angle measurement on rough terrain. J. Terramech.*, 2015, no. 61, pp. 87—100. <https://doi.org/10.1016/j.jterra.2015.04.004>.
84. Guthrie A. G., Botha T. R., Jimenez E., Els P. S., Sandu C. Dynamic 3D measurement of tyre-terrain interaction. *19th International and 14th European-African Regional Conference of the ISTVS*. Budapest, 2017.
85. Li R., Li Y., Zhuang J. Study on passing probability of automobile combination on soft ground. *Proceedings of the 10th International ISTVS Conference*. Kobe, Japan, August 20—24 1990, 1990, vol. II, pp. 349—358.
86. McAllister M. Reduction in the rolling resistance of tyres for trailed agricultural machinery. *Journal of agricultural engineering research.*, 1983, no. 28, pp. 127—137.
87. McKyes E., Fan T. Multiplate penetration tests to determine soil stiffness moduli. *J. Terramech.*, 1985, no. 22, pp. 157—162. [https://doi.org/10.1016/0022-4898\(85\)90050-3](https://doi.org/10.1016/0022-4898(85)90050-3).
88. Paul T. Performance prediction of pneumatic tyres on sand. *Proceedings of the 8th International ISTVS Conference*. Cambridge, UK, 6—10 July 1984, 1984, vol. I, pp. 87—96.
89. Vechinski C. Evaluation of an empirical traction equation for forestry tires. *Proceedings of the 11th International ISTVS Conference*. Lake Tahoe, Nevada, USA, September 27—30 1993, 1993, no. 1, pp. 265—273.
90. Wismer R. D., Luth H. J. Off-road traction prediction for wheeled vehicles. *Transaction ASAE*, 1973, no. 17 (1), pp. 8—10.
91. Freitag D. R. A dimensional analysis of the performance of pneumatic tires on clay. *Journal of Terramechanics.*, 1966, no. 3 (3), pp. 51—68.
92. Rowland D. Tracked vehicle ground pressure and its effect on soft ground performance. *Proceedings of the 4th International ISTVS Conference*. April 24—28 1972. Stockholm; Kiruna, Sweden, 1972, vol. I, pp. 353—384
93. Rowland D., Peel J. W. *Soft ground performance prediction and assessment for wheeled and tracked vehicles*. Institute of mechanical engineering, 1975. 581 p.
94. Maclaurin E. B. The use of mobility numbers to predict the tractive performance of wheeled and tracked vehicles in soft cohesive soils. *Proceedings of the 7th European ISTVS Conference*. 8—10 October 1997. Ferrara, Italy, 1997, pp. 391—398.
95. Rummukainen A., Ala-Ilomäki J. Manoeuvrability of forwarders and its prediction on peatlands. *ISTVS, Third European conference*. ISTVS, Third European conference. *Off the road vehicles and*



- machinery in agriculture, earthwork and forestry. 15—17 September 1986.* Warsaw, Poland, 1986, vol. II, pp. 75—81.
96. Anttila T. *Metsämaan raiteistumisen ennustaminen WES-menetelmää käyttäen.* University of Helsinki, Department of forest resource management. Publications 17, 1998. 853 p.
97. Rantala M. *Metsämaan raiteistumisherkkyyden ennustamismenetelmien vertailu käytännön puunkorjuuoloissa.* Helsingin yliopisto, Metsävarojen käytön laitos. Metsäteknologian tutkielma MMM-tutkintoa varten, 2001.
98. Priddy J. D., Willoughby W. E. Clarification of vehicle cone index with reference to mean maximum pressure. *J. Terramechanics.*, 2006, vol. 43, no. 2, pp. 85—96
99. Khitrov E., Kochnev A., Ivanov V., Stepanishcheva M. Linking the deformation moduli and cone indices of forest and peatland soils. *International Multidisciplinary Scientific GeoConference Surveying Geology and Mining Ecology Management, SGEM*, 2018, no. 18, pp. 297—304.
100. Khitrov E. G., Andronov A. V., Martynov B. G., Spiridonov S. V. Interrelations of various soil types mechanical properties. Interrelations of various soil types mechanical properties. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, pp. 012—032.
101. Williams R. C., Prowell B. Comparison of Laboratory Wheel-Tracking Test Results with WES Track Performance. *Transportation Research Record.*, 1990, pp. 121—128.
102. Abebe A., Tanaka T., Yamazaki M. Soil compaction by multiple passes of a rigid wheel relevant for optimization of traffic. *Journal of Terramechanics.*, 1996, no. 26 (2), pp. 139—148.
103. Bekker M. G. *Introduction to Terrain-Vehicle Systems.* University of Michigan, Ann Arbor, Michigan, 1969.
104. Oida, A. Study on equation of shear stress-displacement curves. *J. Jpn. Soc. Agric. Mach.* 1975, no. 37, pp. 20—25.
105. Sela A. D., Ehrlich I. R. Load support capability of flat plates of various shapes in soils. *J. Terramech.*, 1972, no. 8, pp. 39—69. [https://doi.org/10.1016/0022-4898\(72\)90094-8](https://doi.org/10.1016/0022-4898(72)90094-8).
106. Senatore C., Iagnemma K. Direct shear behaviour of dry, granular soils for low normal stress with application to lightweight robotic vehicle modeling. *Proceedings of the 17th ISTVS International Conference.* Blacksburg, Virginia, 2011.
107. Baker R. Nonlinear mohr envelopes based on triaxial data. *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, 2004, no. 130, pp. 498—506. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(2006\)132:1\(130\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(2006)132:1(130)).
108. Cerato A. B., Lutenecker A. J. Specimen size and scale effects of direct shear box tests of sands. *Geotech. Test. J.*, 2006, no. 29, pp. 507—516. <https://doi.org/10.1520/GTJ100312>.
109. Gan J. K. M., Fredlund D. G., Rahardjo H. Determination of the shear strength parameters of an unsaturated soil using the direct shear test. *Can. Geotech. J.*, 1988, no. 25, pp. 500—510. <https://doi.org/10.1139/t88-055>.
110. Guo P. Modified direct shear test for anisotropic strength of sand. *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, 2008, no. 134, pp. 1311—1318. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(2008\)134:9\(1311\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(2008)134:9(1311)).
111. Peterson R. W. Interpretation of triaxial compression test results on partially saturated soils. *Adv. Triaxial Test Soil Rock. ASTM STP 977*, 1988, pp. 512—538. <https://doi.org/10.1520/STP29096S>.
112. Rahardjo H., Heng O. B., Choon L. E. Shear strength of a compacted residual soil from consolidated drained and constant water content triaxial tests. *Can. Geotech. J.*, 2004, no. 41, pp. 421—436. <https://doi.org/10.1139/t03-093>.
113. Sun D., Yao Y. P., Matsuoka H. Modification of critical state models by Mohr-Coulomb criterion. *Mech. Res. Commun.*, 2006, no. 33, pp. 217—232. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2005.05.006>.

114. Turnage G. W. Prediction of in-sand tire and wheeled vehicle drawbar performance. *Proceedings of the 8 th International ISTVS Conference. Cambridge, UK, 6–10 July 1984, 1984*, vol. I, pp. 121–150.
115. Turnage G. W. Using dimensionless prediction terms to describe off-road wheel vehicle performance. *ASAE Paper.*, 1972, no. 72-634.
116. Larminie J. C. Standards for mobility requirements of military vehicles. *Journal of Terramechanics.*, 1988, no. 25 (3), pp. 171–189.
117. Dwyer M. Tractive performance of a wide, low-pressure tyre compared with conventional tractor drive tyres. *Journal of terramechanics.*, 1987, no. 24 (3), pp. 227–234.
118. Gee-Clough D., McAllister M., Pearson G., Evernden D. The empirical prediction of tractor-implement field performance. *Journal of terramechanics.*, 1978, no. 15 (2), pp. 81–94.
119. Gee-Clough D. The Bekker theory of rolling resistance amended to take account of skid and deep sinkage. *J. Terramech.*, 1976, no. 13, pp. 87–105. [https://doi.org/10.1016/0022-4898\(76\)90016-1](https://doi.org/10.1016/0022-4898(76)90016-1).
120. Gee-Clough D., Sommer M. S. Steering forces on undriven, angled wheels. *J. Terramech.*, 1981, no. 18, pp. 25–49. [https://doi.org/10.1016/0022-4898\(81\)90016-1](https://doi.org/10.1016/0022-4898(81)90016-1).
121. Brixius W. W. Traction prediction equations for bias ply tires. *ASAE paper.*, 1987, no. 87-1622.
122. Ashmore C., Burt C., Turner J. An empirical equation for predicting tractive performance of log- skidder tires. *Transactions of the ASAE*, 1987, no. 30 (5), pp. 1231–1236.
123. Rummer R., Ashmore C. Factors affecting the rolling resistance of rubber-tired skidders. *ASAE Paper.*, 1985, no. 85-1611, 15 p.
124. Sharma K. A., Pandley K. P. Matching tyre size to weight, speed and power available for maximising pulling ability of agricultural tractors. *Journal of terramechanics.*, 2001, no. 28 (2), pp. 71–88.
125. Chiroux R. C. et al. Three-dimensional finite element analysis of soil interaction with a rigid wheel. *Appl. Math. Comput.*, 2005, no. 162, pp. 707–722.
126. Cueto O. G., Coronel C. E. I., Bravo E. L., Morfa C. A. R., Suárez M. H. Modelling in FEM the soil pressures distribution caused by a tyre on a Rhodic Ferralsol soil. *J. Terramechanics.*, 2016, vol. 63, pp. 61–67.
127. Cueto O., Coronel C., Bravo E., Morfa C. A. R., Suárez M. H. Modelling in FEM the soil pressures distribution caused by a tyre on a Rhodic Ferralsol soil. *Journal of Terramechanics.*, 2015, no. 63. [10.1016/j.jterra.2015.09.003](https://doi.org/10.1016/j.jterra.2015.09.003).
128. Fervers C. W. Improved FEM simulation model for tire-soil interaction. *J. Terramechanics.*, 2004, no. 41, pp. 87–100.
129. Letherwood D. M., Jayakumar Paramsothy Li Guangbu Contreras U., D Foster C., A Shabana A. Comparison between a terramechanics model and a continuum soil model implemented within the absolute nodal coordinate formulation. *6 th Asian Conference on Multibody Dynamics.*, 2012.
130. Li Hao Schindler C. Analysis of soil compaction and tire mobility with finite element method. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part K: Journal of Multi-body Dynamics.*, 2013, no. 227, pp. 275–291.
131. Xia K. Finite element modeling of tire/terrain interaction: Application to predicting soil compaction and tire mobility. *J. Terramechanics.*, 2011, vol. 48, no. 2, pp. 113–123.