

DOI: 10.15393/j2.art.2026.9323

УДК 69.059

Статья

Математическая модель образования неровности типа «гребёнка»

Степанов Артём Валерьевич

кандидат технических наук, доцент, Петрозаводский государственный университет (Петрозаводск, Российская Федерация), stepanov@petrstu.ru

Питухин Евгений Александрович

доктор технических наук, профессор, Петрозаводский государственный университет (Петрозаводск, Российская Федерация), eugene@petrstu.ru

Получена: 16 декабря 2025 / Принята: 10 апреля 2026 / Опубликовано: 28 апреля 2026

Аннотация: Повышение качества дорожных покрытий лесовозных автомобильных дорог и снижение затрат на их содержание является актуальной проблемой. Интенсивное движение лесовозных автопоездов существенно уменьшает срок службы покрытий. На покрытиях переходного типа наиболее часто встречаются разрушения в виде износа, т. е. уменьшения толщины, просадок, пучин, сплошной ямочности и гребёнки. Среди вышеперечисленных деформаций наиболее частым явлением будет гребёнка или неровность типа «стиральная доска». Данный вид разрушений является малоизученным и достаточно не прост с точки зрения понимания процессов, происходящих при развитии гребёнки. Так, например, в Республике Карелия общая протяжённость дорог с некапитальным покрытием составляет 9430 км, или 72,9 % от общей протяжённости дорог региона. В работе рассмотрена математическая модель образования неровности типа «стиральная доска» как на лесовозных дорогах, так и дорогах общего пользования с грунтовыми покрытиями и покрытиями переходного типа в виде щебёночных и песчано-гравийных смесей. В математической модели, разработанной и представленной в данной статье, вопрос с размахом гребёнки был решён путём использования уравнений регрессии. В результате получили математическую модель процесса образования неровности типа «гребёнка», которая учитывает скорость движения транспортных средств, характеристики подрессорной части автомобилей, нагрузки на покрытие, число циклов нагружения дорожного полотна проезжающими машинами, а также характеристики материала покрытия. Все вышеперечисленные

параметры позволяют определить шаг, размах гребёнки, скорость роста гребёнки и тем самым спрогнозировать работы по содержанию лесовозных автомобильных дорог.

Ключевые слова: дорожное покрытие; вероятность разрушения; гребёнка

DOI: 10.15393/j2.art.2026.9323

Article

Mathematical model of a «washboard» — type unevenness formation

Artem Stepanov

*Ph. D. in engineering, associate professor, Petrozavodsk State University
(Petrozavodsk, Russian Federation), stepanov@petrsu.ru*

Evgeny Pitukhin

*D. Sc. in engineering, professor, Petrozavodsk State University
(Petrozavodsk, Russian Federation), eugene@petrsu.ru*

Received: 16 December 2025 / Accepted: 11 April 2026 / Published: 28 April 2026

Abstract: Improving the quality of road surfaces of logging roads and reducing the cost of their maintenance is an urgent problem. Heavy traffic of logging road trains significantly reduces the service life of coatings. Damage in the form of wear is a most common one on transitional coating, it may be a decrease in thickness, subsidence, depths, continuous potholes or “washboard” type road unevenness. Among the deformations listed above, the most common one is «washboard» type road unevenness. This type of destruction is poorly studied and is rather incomprehensible as for following the processes occurring during the development of this type of road unevenness. For example, in the Republic of Karelia, the total length of roads with non-capital pavement is 9430 km, or 72.9 % of the total length of roads in the region. The paper considers a mathematical model of the formation of washboard-type unevenness on both logging and public roads with unpaved and transitional coatings in the form of macadam or sand-gravel mixtures. In the mathematical model presented in this article, the issue of “washboard” span was solved by using regression equations. As a result, we have obtained a mathematical model of the process of formation of a «washboard» type unevenness, which takes into account the speed of vehicles, the characteristics of the suspension part of cars, the load on the pavement, the number of traffic load cycles as well as the characteristics of the coating material. All of the above parameters allowed us to determine the step, the span of the «washboard”, its formation rate and thereby predict the maintenance of logging roads.

Keywords: road surface; probability of destruction; washboard

1. Введение

В настоящее время основной объём заготовленной древесины транспортируется по лесовозным дорогам и дорогам общего пользования. Основные регионы страны, в которых добывается древесина, имеют достаточно большую долю дорог с низшим или переходным типом покрытия. На таких покрытиях дефекты появляются намного быстрее и чаще. Для прогнозирования сроков работы или режима эксплуатации дорог составляются различные математические модели. Например, в труде М. А. Завьялова и А. М. Кириллова [1] сделан анализ зависимостей термодинамических функций покрытия автомобильных дорог от времени эксплуатации, выведен ряд расчётных формул для нахождения межремонтного срока службы. Обновлённые критерии, также энергетические, предложены для оценки долговечности в материалах М. Livneh [2] и С. Maggiore и соавт. [3]. Методы механики разрушения появились в прошлом веке и сегодня интенсивно развиваются и применяются в большинстве сфер инженерной деятельности [4—10].

Следует отметить, что в большинстве работ по моделированию разрушений конструкций переменные полагаются детерминистическими, т. е. неслучайными. Также во многих работах используется вероятностный подход в методах механики разрушения [6], [7], [10—14]. Вероятностно-статистические методы разрабатываются в трёх основных направлениях [15]. Самый простой подход представляется экстраполяцией данных по разрушениям и не учитывает механические и физические моменты изучаемой системы. Этот анализ называется подход «баз данных» и представлен в материалах [16—19].

2. Материалы и методы

Эксперименты, которые проводил К. В. Mather [20], показали, что причины образования гребёнки связаны с нестабильностью колебаний подрессорной части автомобиля, т. е. волнистость возникает от движения колеса, которое вначале заезжает по гребню вверх и подлетает в воздух, а после падения, на некотором расстоянии, оно выбивает одну часть материала покрытия, а другую часть — значительно уплотняет. В любом случае это воздействие создаёт опять очередную впадину, развивая волнистый профиль. Основываясь на этом положении, А. Douglas в своей работе [21] представил математическую модель образования неровности типа «гребёнка», которая представлена ниже.

Допустим, существует некоторая ровная поверхность лесовозной автомобильной дороги в направлении x , причём реальное положение профиля соответствует значению $H(x,t)$. По этой дороге передвигаются автомобили массой M со скоростью V , ходовая часть которых состоит из рессор с собственной частотой ω_0 и амортизаторов с коэффициентом демпфирования b . Пусть Z — высота до рамы проезжающих машин относительно ровной поверхности и $H - Z + (g/\omega_0^2)$ — это величина, на которую пружины сжимаются (рисунок 1).

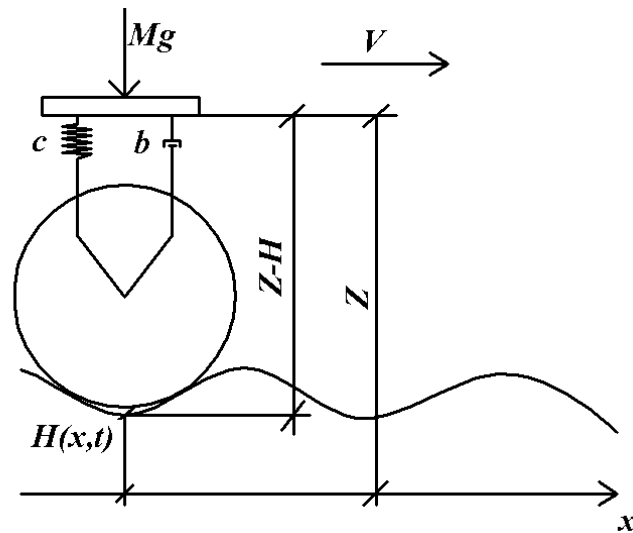


Рисунок 1. Элементы рассматриваемой модели [рисунок авторов]

Figure 1. Elements of the considered model

Теперь можно записать второй закон Ньютона для единичного автомобиля, что позволит связать движущийся по горизонтали автомобиль со скоростью V и профиль лесовозной автомобильной дороги в единой системе координат. Запишем его в виде [21]:

$$(\partial_t + V\partial_x)^2 Z + \Gamma\omega_0(\partial_t + V\partial_x)(Z - H) + \omega_0^2(Z - H) = 0. \quad (1)$$

Безразмерная величина $\Gamma = b/M\omega_0$ показывает отношение периода колебаний пружин на время демпфирования, причём его критическое значение для пружин достигается при $\Gamma = 2$. Предположим, что дорожный профиль H изменяется во времени намного медленнее по сравнению с периодом колебаний колеса, поэтому пренебрегаем значением $\partial_t H$ в этом уравнении.

Возможно, что силы, воздействующие на лесовозную дорогу от проезжающего транспорта, вызывают эрозию или пластичные сжатия покрытия. Принимаем величину сжатия покрытия пропорционально действующей на него силе, с учётом коэффициента пропорциональности уплотнения покрытия a . Рассчитываем, что a будет незначительным, т. к. развитие дорожного профиля происходит медленно. Также будем предполагать, что a будет уменьшаться из-за сжатия и уплотнения материала покрытия. Таким образом, мы можем смоделировать этот эффект, который даёт зависимость функции от H . Запишем уравнение для профиля дорожного покрытия:

$$\partial_t H = -Ma(H)[g + (\partial_t + V\partial_x)^2 Z]. \quad (2)$$

Это уравнение не учитывает геометрическое различие между $\partial_t H$ и нормальной составляющей скорости, а также других горизонтальных составляющих сил, которые действуют со стороны автомобиля. Однако если считать поверхность дороги близкой к плоской, то этот эффект не проявляется в линейном порядке.

Теперь рассмотрим профиль земляного полотна H , который равен:

$$H = H_0(t) + h(t) \exp(ikx), \quad (3)$$

где H_0 — пространственная постоянная; h — размах зарождающегося волнистого профиля, м; k — номер волны.

Поскольку формирование профиля земляного полотна протекает достаточно медленно, то правая часть уравнения (2) должна содержать среднее значение производной Z , усреднённой за время, кратное $1/a$. Но из уравнения (1) мы видим, что Z расслабляет квазистационарную структуру, определяя текущий профиль земляного полотна H намного быстрее, чем величина $1/\omega_0$. Таким образом, чтобы найти время средней величины Z , которая принадлежит уравнению (2), мы можем упустить время производных в (1). Учитывая наши разработки для H , можно решить $Z(x)$ для данного профиля земляного полотна $H(x)$. Подставив результат в выражение (2) и линеаризируя по h , получаем:

$$\partial_t h = -\beta h - Ma(H_0)[\omega_0^2 + i\Gamma\omega_0Vk][\omega_0^2 - V^2k^2 + i\Gamma\omega_0Vk]^{-1}(\partial_t + iVk)^2 h, \quad (4)$$

где β — показатель, определяющий скорость уплотнения дороги, определяющийся по формуле

$$B = Mg(da/dH). \quad (5)$$

В связи с тем, что a мало, мы видим, что $\partial_t h$ будет кратна a . Таким образом, $\partial_t h$ продолжаем сопоставлять со значениями V , k и h . Теперь после рассмотрения мы имеем конкретное определение для логарифмической производной амплитуды волнообразного профиля:

$$\sigma = -\beta + MaV^2k^2[\omega_0^2 + i\Gamma\omega_0Vk][\omega_0^2 - V^2k^2 + i\Gamma\omega_0Vk]^{-1}, \quad (6)$$

где σ — линейная скорость роста синусоидальных неровностей поверхности дороги ($\sigma = \frac{d \ln h}{dt}$).

Теперь мы можем проанализировать стабильность плоскости земляного полотна следующим способом: допустим, есть любая волна номер k , для которой линейная скорость роста имеет положительное направление, тогда её амплитуда растёт во времени при неустойчивой горизонтальной поверхности. Комплексная часть роста жёсткости пружины информирует о том, что волнообразование движется по направлению x , т. е. увеличивается и уменьшается. Из уравнения (6) можем высчитать волну номер k_{max} , которая увеличивается очень быстрыми темпами:

$$k_{max} = \frac{\omega_0}{V(1 + \Gamma - \Gamma^2)^{1/2}}. \quad (7)$$

Аналогично для наиболее быстро растущей волны определяем её длину по формуле

$$T = VT_p(1 + \Gamma - \Gamma^2)^{1/2}, \quad (8)$$

где T_p — период колебаний автомобильных пружин, с.

Рассмотрим некоторые модели, определяющие скорость роста применительно к гребёнке.

В более простых моделях, описывающих рост популяций, числа научных публикаций и т. д., предполагается, что скорость их роста пропорциональна уже достигнутой величине [22]. Аналогично полагаем, что скорость роста высоты (размаха) гребёнки пропорциональна уже достигнутой величине:

$$\frac{dh}{dN} = Ch, \quad (9)$$

где h — размах цикла, м; N — число циклов нагружения дорожного полотна проезжающими транспортными средствами; C — коэффициент пропорциональности константа.

Интегрируя формулу (9) и полагая $h = h_0$ при $N = 0$, получим размах гребёнки за число циклов N :

$$h(N) = h_0 \exp(CN). \quad (10)$$

Таким образом, при описании скорости роста гребёнки моделью (9), с увеличением числа циклов нагружений гребёнка растёт по экспоненциальной зависимости при $N \rightarrow \infty$, $h \rightarrow \infty$. Очевидно, что модель (9) справедлива только на ограниченном интервале времени. В действительности в некоторый момент времени рост гребёнки должен затормозиться. Учёт эффекта торможения может быть описан моделью

$$\frac{dh}{dN} = Ch(b - h), \quad (11)$$

где b — константа, определяющая эффект торможения.

Когда h увеличится и становится сравнимым по величине с b , то $b - h \rightarrow 0$, следовательно, $\frac{dh}{dN} \rightarrow 0$, тем самым рост h прекращается.

В первом приближении можно положить $b = h_{max}$.

В модели (11) эффект торможения описывается множителем $(b - h)$ или $(h_{max} - h)$, являющимся абсолютной величиной. Эффект торможения может быть описан и относительной величиной, например $\frac{h_{max} - h}{h_{max}}$.

В этом случае скорость роста впадины гребня опишется данной зависимостью

$$\frac{dh}{dN} = C \frac{h_{max} - h}{h_{max}} h. \quad (12)$$

После интегрирования получаем логистическую кривую Верхалста — Перла [23].

$$h = \frac{h_0 h_{max} \exp(CN)}{h_{max} - h_0 (1 - \exp(CN))}. \quad (13)$$

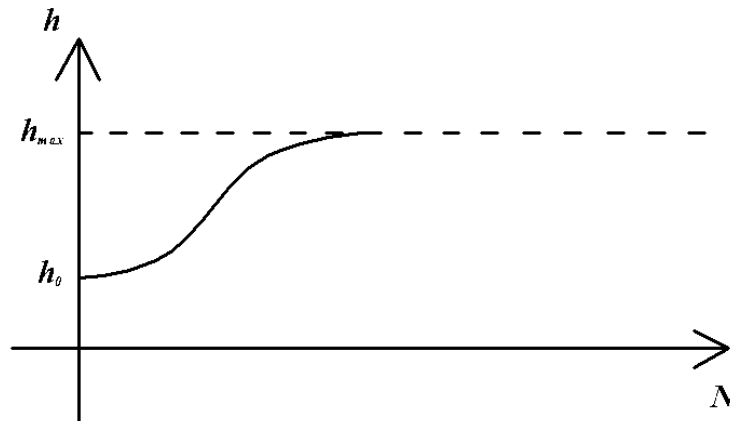


Рисунок 2. Логистическая функция, описывающая рост гребня [рисунок авторов]

Figure 2. A logistic function describing the growth of the ridge

Модели (9), (11) и (12) не учитывают такой важный фактор, как уровень нагруженности дорожного покрытия.

Скорость роста гребёнки с учётом нагруженности опишем следующим уравнением:

$$\frac{dh}{dN} = C\tau_{max}^{\alpha}, \quad (14)$$

где h — размах цикла (профиля гребёнки), мм; N — количество циклов нагружения; τ_{max} — максимальные касательные напряжения, возникающие в дорожном покрытии при воздействии колеса, МПа, C , α — эмпирические коэффициенты, зависящие от свойств дорожного покрытия и скорости роста гребёнки.

Уравнение (14) обладает тем недостатком, что скорость не зависит от формы и размеров уже образовавшейся гребёнки и, прежде всего, величины h .

3. Результаты

По аналогии с уравнением Пэриса, описывающим скорость роста трещины при воздействии циклических нагрузок, полагаем:

$$\frac{dh}{dN} = C(\tau_{max}h^{1/2})^{\alpha}. \quad (15)$$

Откуда

$$N = \int_{h_0}^{h_{max}} \frac{dh}{C(\tau_{max}h^{1/2})^{\alpha}}. \quad (16)$$

Интегрируя уравнение (16), получим число циклов до образования гребёнки глубиной h_{max} :

$$N = \frac{2(h_{max}^{\frac{2-\alpha}{2}} - h_0^{\frac{2-\alpha}{2}})}{C\tau_{max}^{\alpha}(2-\alpha)}. \quad (17)$$

В модели (15) показатель степени при h составляет 0,5, что справедливо для уравнения Пэриса в механике разрушения и следует из точного решения задачи теории упругости о распространении трещины в сплошной анизотропной упругой среде. В общем случае показатель степени можно обозначить величиной β , подлежащей экспериментальному определению. Но это существенно усложнит решение задачи.

$$\frac{dh}{dN} = C(\tau_{max}h^{\beta})^{\alpha}. \quad (18)$$

$$N = \int_{h_0}^{h_{max}} \frac{dh}{C\tau_{max}^{\alpha}h^{\beta+\alpha}}. \quad (19)$$

Интегрируя уравнение (19), получим:

$$N = \frac{h_{max}^{1-\alpha\beta} - h_0^{1-\alpha\beta}}{C\tau_{max}^{\alpha}(1-\alpha\beta)}. \quad (20)$$

4. Обсуждение и заключение

В качестве основы для составления модели процесса образования неровности типа «гребёнка» принята математическая модель, представленная западным учёным А. Douglas [21]. В результате расчёта с её использованием можно получить значение величины шага между гребнями от воздействия проезжающих автомобилей. Однако в рассматриваемой модели не предусмотрена оценка размаха между максимумом и минимумом гребней.

В математической модели, разработанной в представленной работе, вопрос с размахом гребёнки был решён путём использования уравнений регрессии.

В результате нам удалось получить математическую модель процесса образования неровности типа «гребёнка», которая учитывает несколько параметров, таких как скорость движения транспортных средств, характеристики подрессорной части автомобилей, нагрузки на покрытие, число циклов нагружения дорожного полотна проезжающими машинами, а также характеристики материала покрытия. Все вышеперечисленные параметры позволяют определить шаг, размах гребёнки, скорость роста гребёнки и тем самым спрогнозировать работы по содержанию лесовозных автомобильных дорог.

Список литературы

1. *Zavyalov M. A., Kirillov A. M.* Evaluation methods of asphalt pavement service life // Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 2. P. 42—56.
2. *Livneh M.* On the Fatigue Criterion for Calculating the Thickness of Asphalt Layers // 7th RILEM International Conference on Cracking in Pavements: mechanisms, modeling, testing, detection, prevention, and case histories. Springer. RILEM Bookseries. 2012. Vol. 4. P. 761—770.
3. Evaluation of Fatigue Life Using Dissipated Energy Methods / C. Maggiore, J. Grenfell, G. Airey [et al.] // 7th RILEM International Conference on Cracking in Pavements: mechanisms, modeling, testing, detection, prevention, and case histories. Springer. RILEM Bookseries. 2012. Vol. 4. P. 643—652.
4. *Paris P. S., Erdogan F. A.* A critical analysis of crack propagation law // Journal Basic Engng, ASME 85D. 1963. P. 528—534.
5. *Pitukhin A. V.* Fracture Mechanics and Optimal Design. // Int. Journal for Numerical Methods in Engineering. 1992. Vol. 34. P. 933—940.
6. *Pitukhin A. V.* Optimal Design Problems Using Fracture Mechanics Methods // Computers and Structures. 1997. Vol. 65, no. 4. P. 621—624.
7. Determination of Crack Growth Parameters of Asphalt Mixtures / Maarten M. J. Jacobs, Arian H. De Bondt, Piet C. Hopman [et al.] // 7th RILEM International Conference on Cracking in Pavements: mechanisms, modeling, testing, detection, prevention, and case histories. Springer. RILEM Bookseries. 2012. Vol. 4. P. 941—952.
8. *Johnston G. O.* A review of probabilistic fracture mechanics literature // Reliability Engineering. 1982. No. 3. P. 423—448.
9. *Rau C. A., Besuner P. M.* Statistical aspects of design: risk assessment and structural safety // Philos. Trans. R. Soc. Ser. A299. London, 1981. P. 111—130.
10. *Bolotin V. V.* Stochastic models of cumulative damage in composite materials // Progress in Fatigue and Fracture. 1976. P. 103—111.
11. *Morgado T. I. M.* Fatigue Life Extension Study in Cast Steel Railway Couplings Used in Freight Trains. // International Journal of Mechanical Engineer and Applications. Special Issue: Structural Integrity of Mechanical Components. 2015. Vol. 3, no. 2-1. P. 1—6.
12. *Lepikhin A., Moskvichev V., Doronin S.* Statistical fracture modeling of weld joint for nuclear reactor components // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 1998. Vol. 29. P. 103—107.
13. *Freudenthal A. M., Shinozuka M.* Structural safety under conditions of ultimate load failure and fatigue // WaDDTR. 1961. P. 61—77.
14. *Freudenthal A. M.* New aspects of fatigue and fracture mechanics // Eng. Fract. Mech. 1974. No. 6. P. 775—793.
15. *Kaz H.-W., Lee Y.-H., Wu P.-H.* Development of Fatigue Cracking Prediction Models Using Long-Term Pavement Performance Database // Journal of Transportation Engineering. 2008. No. 134 (11). P. 477—482.
16. *Ferreira A., Rui Micaelo, Souza R.* Cracking Models for Use in Pavement Maintenance Management // 7th RILEM International Conference on Cracking in Pavements: mechanisms, modeling, testing, detection, prevention, and case histories. Springer. RILEM Bookseries. 2012. Vol. 4. P. 429—439.
17. Метод определения вероятности безотказной работы участка лесовозной автомобильной дороги вследствие усталостного изнашивания дорожного покрытия / А. В. Питухин, А. Н. Петров, В. И. Марков [и др.] // Транспортное дело России. 2013. № 2 (105). С. 15—18.

18. Серенсен С. В., Когаев В. П., Шендерович Р. М. Несущая способность и расчёты деталей машин на прочность. М.: Машиностроение, 1975. 488 с.
19. Mohammad Modarres, Mark P. Kaminskiy, Vasily Krivtsov. Reliability Engineering and Risk Analysis: A Practical Guide. CRC Press, 2016. 522 p.
20. Mather K. B. The cause of road corrugations and the instability of surfaces under wheel action, parts 1 and 2 // Civ. Eng. Public Works Rev. 1962. No. 57. P. 617—620 (pt. 1); P. 781—784 (pt. 2).
21. Douglas A. Kurtze. The genesis of washboard roads // International journal of modern physics. 2001. Vol. 15. P. 24—25.
22. Питухин А. В., Кондратьев Ю. Н., Костюкевич В. М. Основы математического моделирования: Учебное пособие для студентов лесоинженерного факультета. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2013. 48 с.
23. Математическое моделирование / Пер. с англ.; Под ред. Дж. Эндрюс, Р. Мак-Лоун. М.: Мир, 1979. 282 с.

References

1. Zavyalov M. A., Kirillov A. M. Evaluation methods of asphalt pavement service life. *Magazine of Civil Engineering*, 2017, no. 2, pp. 42—56.
2. Livneh M. On the Fatigue Criterion for Calculating the Thickness of Asphalt Layers. *7th RILEM International Conference on Cracking in Pavements: mechanisms, modeling, testing, detection, prevention, and case histories*. Springer. RILEM Bookseries, 2012, vol. 4, pp. 761—770.
3. Maggiore C., Grenfell J., Airey G., Colop A. C. Evaluation of Fatigue Life Using Dissipated Energy Methods. *7th RILEM International Conference on Cracking in Pavements: mechanisms, modeling, testing, detection, prevention, and case histories*. Springer. RILEM Bookseries, 2012, vol. 4, pp. 643—652.
4. Paris P. S., Erdogan F. A. A critical analysis of crack propagation laws. *Journal Basic Engng, ASME 85D*, 1963, pp. 528—534.
5. Pitukhin A. V. Fracture Mechanics and Optimal Design. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992, vol. 34, pp. 933—940.
6. Pitukhin A. V. Optimal Design Problems Using Fracture Mechanics Methods. *Computers and Structures*, 1997, vol. 65, no. 4, pp. 621—624.
7. Maarten M. J. Jacobs, Arian H. De Bondt, Piet C. Hopman, Radjan Khedoe. Determination of Crack Growth Parameters of Asphalt Mixtures. *7th RILEM International Conference on Cracking in Pavements: mechanisms, modeling, testing, detection, prevention, and case histories*. Springer. RILEM Bookseries, 2012, vol. 4, pp. 941—952.
8. Johnston G. O. A review of probabilistic fracture mechanics literature. *Reliability Engineering*, 1982, no. 3, pp. 423—448.
9. Rau C. A., Besuner P. M. Statistical aspects of design: risk assessment and structural safety, *Philos. Trans. R. Soc. Ser. A299*. London, 1981, pp. 111—130.
10. Bolotin V. V. Stochastic models of cumulative damage in composite materials. *Progress in Fatigue and Fracture*, 1976, pp. 103—111.
11. Morgado T. I. M. Fatigue Life Extension Study in Cast Steel Railway Couplings Used in Freight Trains. *International Journal of Mechanical Engineer and Applications. Special Issue: Structural Integrity of Mechanical Components*, 2015, vol. 3, no. 2-1, pp. 1—6.
12. Lepikhin A., Moskvichev V., Doronin S. Statistical fracture modeling of weld joint for nuclear reactor components. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 1998, vol. 29, pp. 103—107.

13. Freudenthal A. M., Shinozuka M. Structural safety under conditions of ultimate load failure and fatigue. *WaDDTR*, 1961, pp. 61—77.
14. Freudenthal A. M. New aspects of fatigue and fracture mechanics. *Eng. Fract. Mech.*, 1974, no. 6, pp. 775—793.
15. Kaz H.-W., Lee Y.-H., Wu P.-H. Development of Fatigue Cracking Prediction Models Using Long-Term Pavement Performance Database. *Journal of Transportation Engineering*, 2008, no. 134 (11), pp. 477—482.
16. Ferreira A., Rui Micaelo, Souza R. Cracking Models for Use in Pavement Maintenance Management. *7th RILEM International Conference on Cracking in Pavements: mechanisms, modeling, testing, detection, prevention, and case histories*. Springer. RILEM Bookseries, 2012, vol. 4, pp. 429—439.
17. Pituhin A. V., Petrov A. N., Markov V. I., Stepanov A. V. A method of determining the probability of the plot of the lesovozny highway due to the fatigue wear of pavement. *Transport case of Russia*, 2013, no. 2 (105), pp. 15—18. (In Russ.)
18. Serensen S. V., Kogaev V. P., SHenderovich R. M. *Bearing capacity and calculations of machine parts for strength*. Moscow, Mechanical Engineering, 1975. 488 p. (In Russ.)
19. Mohammad Modarres, Mark P. Kaminskiy, Vasily Krivtsov. *Reliability Engineering and Risk Analysis: A Practical Guide*. CRC Press, 2016. 522 p.
20. Mather K. B. The cause of road corrugations and the instability of surfaces under wheel action, parts 1 and 2. *Civ. Eng. Public Works Rev.*, 1962, no. 57, pp. 617—620 (pt. 1); pp. 781—784 (pt. 2).
21. Douglas A. Kurtze. The genesis of washboard roads. *International journal of modern physics*, 2001, vol. 15, pp. 24—25.
22. Pitukhin A. V., Kondrat'ev Yu. N., Kostyukevich V. M. *Fundamentals of mathematical modeling: a textbook for students of the faculty of forest engineering*. Petrozavodsk: Publishing house PetrSU, 2013. 48 p. (In Russ.)
23. *Mathematical modeling*. Trans. from English. Edited by J. Andrews, R. McLone. Moscow, Mir, 1979. 282 p. (In Russ.)