Оптимальное распределение ресурсов с использованием динамического программирования

В. М. Костюкевич[1],
Г. А. Давыдков,
И. Г. Хотина
Петрозаводский государственный университет

АННОТАЦИЯ
Развитие средств вычислительной техники и программного обеспечения предъявляет высокие требования к современному выпускнику вуза в области решения любых инженерных задач эффективными методами, реализуемыми в практической деятельности. В качестве иллюстрации в статье приводится пример оптимизации распределения менеджеров по леспромхозам на основе методов динамического программирования.

Ключевые слова: *оптимизация, динамическое программирование, оптимальное распределение ресурсов.*

SUMMARY
The article is devoted to application modern methods of dynamic programming for optimal distribution of human resources.

Keywords: *optimization, dynamic programming, optimal distribution of resources.*

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В общем виде задачи оптимального распределения ресурсов могут быть описаны следующим образом. Имеется некоторое количество ресурсов (материальные, трудовые, финансовые), которые необходимо распределить между различными объектами их использования по отдельным промежуткам планового периода так, чтобы получить максимальную суммарную эффективность от выбранного способа распределения. Показателем эффективности может служить, например, прибыль, себестоимость, суммарные затраты и т. д.

Рассмотрим следующий пример: распределение холдингом специалистов-менеджеров по леспромхозам

Холдинг, включающий целлюлозно-бумажный комбинат и 3 леспромхоза, для повышения эффективности работы леспромхозов решает направить туда 4 менеджеров. Эффективность работы леспромхозов при поступлении в него менеджеров в количестве u повышается в k раз, т. е. представляет собой какую-то функцию $f_i(u)$. Все функции $f_i(n)$, $i = 1, 2, 3$ заданы (табл. 1). Как управление холдинга должно распределить менеджеров по леспромхозам, чтобы в итоге максимально повысить эффективности работы леспромхозов?

Таблица 1

Функция эффективности $f_i(u)$

u	$f_1(u)$	$f_2(u)$	$f_3(u)$
1	1.25	1.21	1.18
2	1.08	1.09	1.11
3	-	-	-
4	-	-	-

Холдинг может готовить и посылать в леспромхоз 1 менеджера в год, причем по условию задачи после 4 лет каждый леспромхоз должен получить не менее 1 менеджера. Таким образом, задача разбивается на 4 шага.

Управляемая система в данном случае – менеджеры, которые распределяются. Состояние системы перед каждым шагом характеризуется одним числом – количество еще нераспределенных менеджеров. Шаговым управлением является распределение менеджера u_1, u_2, ..., u_4, в один из 3 леспромхозов. Требуется найти оптимальное управление, т. е. такую последовательность чисел u_1^*, u_2^*, ..., u_4^*, которая дает максимальное повышение эффективности работы леспромхозов в целом, что эквивалентно следующему выражению:

$$\mathbf{W = W_1 + W_2 + ... + W_4 \rightarrow max.}$$

РЕШЕНИЕ

Начнем оптимизацию с 4 шага. Очевидно, что необходимо последнего менеджера передать одному из 3 леспромхозов. Поэтому возможны 3 варианта и условное оптимальное управление на 4 шаге (рис. 4).

$u_4(s) = s$,

а условный оптимальный выигрыш

$W_4(s) = f_4(s)$.

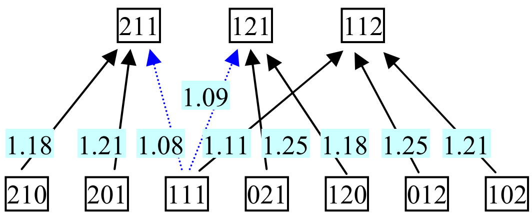

Рис. 1. Условный оптимальный выигрыш на 4 шаге

Задаваясь целой гаммой значений u = 1, 2 по табл. 1 (функция эффективности $f_i(u)$), для каждого значения

---

[1] *Авторы – соответственно доценты кафедры технологии металлов и ремонта и тяговых машин, инженер кафедры транспорта леса и геодезии*

s определим $u_4(s)$ и $W_4(s)$. После 4 шага возможны 3 варианта:

1) леспромхоз имеет 2 менеджеров, 2 и 3 леспромхозы имеют по 1 менеджеру $\boxed{2\ 1\ 1}$,
2) леспромхоз имеет 2 менеджеров, 1 и 3 леспромхозы имеют по 1 менеджеру $\boxed{1\ 2\ 1}$,
3) леспромхоз имеет 2 менеджеров, 1 и 2 леспромхозы имеют по 1 менеджеру $\boxed{1\ 1\ 2}$.

Рассмотрим 1 вариант $\boxed{2\ 1\ 1}$.

В это состояние можно перейти из 3 предыдущих:

$\boxed{2\ 1\ 0}$ $u_{41}(2,1,0 \rightarrow 2,1,1)$; $W_{41}(f_3(1))=1{,}18$;

$\boxed{2\ 0\ 1}$ $u_{42}(2,0,1 \rightarrow 2,1,1)$; $W_{42}(f_2(1))=1{,}21$;

$\boxed{1\ 1\ 1}$ $\boxed{u_{43}(1,1,1 \rightarrow 2,1,1);\ W_{43}(f_1(2))=1{,}08}$;

Рассмотрим 2 вариант $\boxed{1\ 2\ 1}$.

В это состояние можно перейти из 3 предыдущих:

$\boxed{0\ 2\ 1}$ $u_{41}(0,2,1 \rightarrow 1,2,1)$; $W_{41}(f_1(1))=1{,}25$;

$\boxed{1\ 2\ 0}$ $u_{42}(1,2,0 \rightarrow 1,2,1)$; $W_{42}(f_3(1))=1{,}18$;

$\boxed{1\ 1\ 1}$ $\boxed{u_{43}(1,1,1 \rightarrow 1,2,1);\ W_{43}(f_2(2))=1{,}09}$.

Рассмотрим 3 вариант $\boxed{1\ 1\ 2}$.

В это состояние можно перейти из 3 предыдущих:

$\boxed{0\ 1\ 2}$ $u_{41}(0,1,2 \rightarrow 1,1,2)$; $W_{41}(f_1(1))=1{,}25$;

$\boxed{1\ 0\ 2}$ $u_{42}(1,0,2 \rightarrow 1,1,2)$; $W_{42}(f_2(1))=1{,}21$;

$\boxed{1\ 1\ 1}$ $u_{43}(1,1,1 \rightarrow 1,1,2)$; $W_{43}(f_3(2))=1{,}11$.

Из состояния $\boxed{1\ 1\ 1}$ оптимальным из 3 возможных шагов будет последний – передача менеджера в 3 леспромхоз. Поэтому 2 других варианта мы исключаем из рассмотрения.

Аналогично рассматриваем 3 шаг.

Оптимизируем 3 шаг, используя соотношение

$$W_i\,(s) = \max\,\{f_i(u) * W_{i+1}(s\text{-}u)\}$$

На 3 шаге возможны 7 вариантов, соответствующих распределению 3 менеджеров в 3 леспромхоза (рис. 2).

Рассмотрим 1 вариант $\boxed{2\ 1\ 0}$.

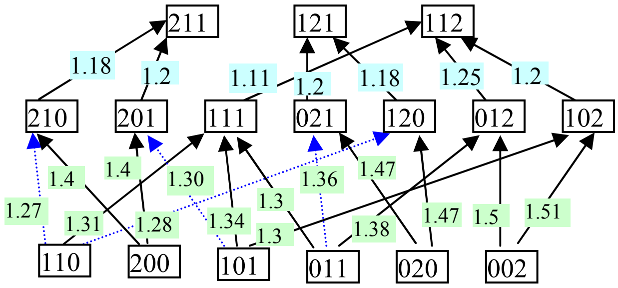

Рис. 2. Условный оптимальный выигрыш на 3 шаге

В это состояние можно перейти из 2 предыдущих:

$\boxed{1\ 1\ 0}$ $u_{31}(1,1,0 \rightarrow 2,1,0)$;

$W_{31}(f_1(2)\ f_3(1)) = 1{,}08*1.18 = 1.2744$;

$\boxed{2\ 0\ 0}$ $u_{32}(2,0,0 \rightarrow 2,1,0)$;

$W_{32}(f_2(1)\ f_3(1)) = 1{,}21*1.18 = 1.4278$.

Рассмотрим 2 вариант $\boxed{2\ 0\ 1}$.

В это состояние можно перейти из 2 предыдущих:

$\boxed{1\ 0\ 1}$ $u_{31}(1,0,1 \rightarrow 2,0,1)$;

$W_{31}(f_3(1)\ f_2(1)) = 1{,}18*1.21 = 1.\ 4278$;

$\boxed{2\ 0\ 0}$ $u_{32}(2,0,0 \rightarrow 2,0,1)$;

$W_{32}(f_1(2)\ f_2(1)) = 1{,}08*1.21 = 1.3068$.

Аналогично рассчитываем остальные варианты (рис. 3 и 4).

3 вариант:
$u_{31}(1,1,0 \rightarrow 1,1,1)$; $W_{31}(f_3(1)\ f_3(2)) = 1{,}18*1.11 = 1.3098$
$u_{32}(1,0,1 \rightarrow 1,1,1)$; $W_{32}(f_2(1)\ f_3(2)) = 1{,}21*1.11 = 1.3431$
$u_{32}(0,1,1 \rightarrow 1,1,1)$; $W_{32}(f_1(1)\ f_3(2)) = 1{,}25*1.11 = 1.3875$

4 вариант:
$u_{31}(0,1,1 \rightarrow 0,2,1)$; $W_{31}(f_2(2)\ f_1(1)) = 1{,}09*1.25 = 1.3625$
$u_{32}(0,2,0 \rightarrow 0,2,1)$; $W_{32}(f_3(1)\ f_1(1)) = 1{,}18*1.25 = 1.475$

5 вариант:
$u_{31}(1,1,0 \rightarrow 1,2,0)$; $W_{31}(f_2(2)\ f_3(1)) = 1{,}09*1.18 = 1.2862$
$u_{32}(0,2,0 \rightarrow 1,2,0)$; $W_{32}(f_1(1)\ f_3(1)) = 1{,}25*1.18 = 1.475$

6 вариант:
$u_{31}(0,1,1 \rightarrow 0,1,2)$; $W_{31}(f_3(2)\ f_1(1)) = 1{,}11*1.25 = 1.3875$
$u_{32}(0,0,2 \rightarrow 0,1,2)$; $W_{32}(f_2(1)\ f_1(1)) = 1{,}21*1.25 = 1.5125$

7 вариант:
$u_{31}(1,0,1 \rightarrow 1,0,2)$; $W_{31}(f_3(2)\ f_2(1)) = 1{,}11*1.21= 1.3431$;
$u_{32}(0,0,2 \rightarrow 1,0,2)$; $W_{32}(f_1(1)\ f_2(1)) = 1{,}25*1.21 = 1.5125$

Неоптимальные решения отметим на рисунках пунктирной линией и в дальнейшем не будем их рассматривать.

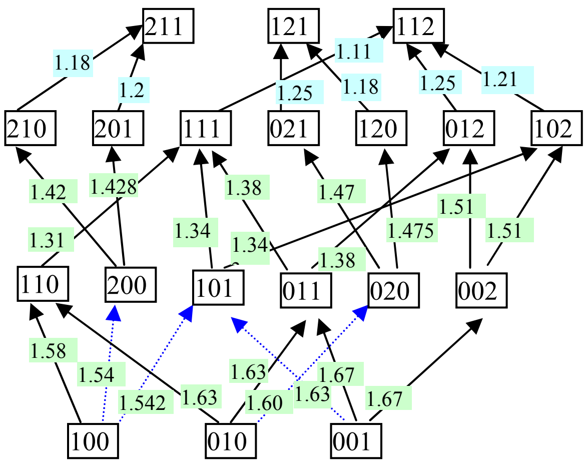

Рис. 3. Условный оптимальный выигрыш на 2 шаге

Аналогично рассмотрим первый шаг

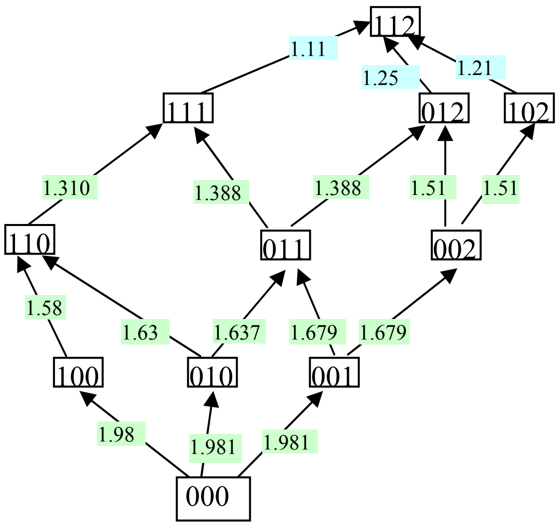

Рис. 4. Условный оптимальный выигрыш на 1 шаге

ВЫВОДЫ
В итоге мы пришли к решению задачи.

Как видно из рисунка 4, максимально повысить эффективность лесозаготовительных предприятий можно в 1.981 раза. Причем первичное распределение – в какой именно леспромхоз будет направлен 1 менеджер, значения не имеет. Но все последующие шаги однозначно определены и оптимальное распределение менеджеров в финале таково – в 1 и 2 леспромхоз по одному и в 3 два менеджера.

Полученные числовые данные занесем в таблицу 2.

Таблица 2

s	i=4		s	i=3	
	$u_4(s)$	$W_4(s)$		$u_3(s)$	$W_3(s)$
0,0,1	2,1,0	1,18	1,0,0	1,1,0	1,2744
			0,1,0	2,0,0	1,4278
0,1,0	2,0,1	1,21	1,0,0	1,0,1	1,3068
			0,0,1	2,0,0	1,4278
0,0,1	1,1,1	1,11	1,0,0	0,1,1	1,3875
			0,1,0	1,0,1	1,3431
			0,0,1	1,1,0	1,3098
0,1,0	1,1,1	1,09			
1,0,0	1,1,1	1,08			
1,0,0	0,2,1	1,25	0,1,0	0,1,1	1,3625
			0,0,1	0,2,0	1,475
0,0,1	1,2,0	1,18	0,1,0	1,1,0	1,2862
			1,0,0	0,2,0	1,475
1,0,0	0,1,2	1,25	0,0,1	0,1,1	1,3875
			0,1,0	0,0,2	1,5125
			0,0,1	0,1,1	1,3875
0,1,0	1,0,2	1,21	0,0,1	1,0,1	1,3431
			1,0,0	0,0,2	1,5125

s	i=2		s	i=1	
	$u_2(s)$	$W_2(s)$		$u_1(s)$	$W_1(s)$
1,0,0	1,0,0	1,542			
1,0,0	1,0,0	1,542			
0,0,1	0,1,0	1,6373	0,1,0	0,0,0	1,9811
0,1,0	0,0,1	1,6789	0,0,1	0,0,0	1,9811
0,0,1	1,0,0	1,542			
1,0,0	0,0,1	1,6335			
0,1,0	1,0,0	1,5849	1,0,0	0,0,0	1,9811
1,0,0	0,1,0	1,6373	0,1,0	0,0,0	1,9811
0,1,0	0,1,0	1,6078			
0,1,0	0,1,0	1,6078			
0,1,0	0,0,1	1,6789	0,0,1	0,0,0	1,9811
0,0,1	0,0,1	1,6789	0,0,1	0,0,0	1,9811
0,0,1	0,1,0	1,6373	0,1,0	0,0,0	1,9811
0,0,1	1,0,0	1,542			
1,0,0	0,0,1	1,6335			
0,0,1	0,0,1	1,6789	0,0,1	0,0,0	1,9811

Цветом в таблице 2 выделены заранее неоптимальные решения, которые в ходе решения задачи отбрасываются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Герасимов Ю. Ю. Математические методы и модели в расчетах на ЭВМ: применение в лесоуправлении и экологии: Учебник для лесных вузов / Ю. Ю. Герасимов, В. К. Хлюстов. М.: МГУЛ, 2001. 260 с.