Метод компенсации ошибок в определении объема сортиментов

Нестеров Л.А. [1]
Петрозаводский государственный университет

В данной работе рассматривается метод компенсации ошибок в определении объема сортиментов, обусловленный вероятностным распределением диаметров. Предлагаемый метод может найти применение в автоматических системах, определяющих объем сортиментов по ГОСТ 2708-75.

Ключевые слова: *объем, сортименты, диаметр, ошибка, вероятность, аппроксимация.*

Для определения объемов круглых лесоматериалов с помощью таблиц ГОСТ 2708-75 необходимо измерять диаметры с определенной градацией Δd, принятой при составлении таблиц объемов. На рис.1. приведен график зависимости объема круглых лесоматериалов от диаметра. В кубатурных таблицах занесены значения объемов Q_1 и Q_2, соответствующие диаметрам d_1 и d_2

Диаметр d_0 соответствует граничному значению. Таким образом, если истинное значение диаметра бревна равно d_x', то истинный объем будет Q_x', однако вследствие дискретности отсчета диаметров это измерение будет идентифицировано с диаметром d_1 и табличное значение объема равно Q_1, т.е. определение объема будет произведено с ошибкой

$$\Delta Q_1 = Q_x' - Q_1 . \qquad (1)$$

Аналогично при измерении диаметра d_x'' будет допущена ошибка

$$\Delta Q_2 = Q_2 - Q_x'' , \qquad (2)$$

которая вызвана тем, что истинный диаметр d_x'' идентифицирован с диаметром d_2.

При определении объема сортиментов, диаметры которых лежат в диапазоне $[d_1 \div d_0]$, возникает отрицательная ошибка, так как значение табличного объема Q_1 меньше истинного значения объема сортимента.

При определении объема сортиментов, диаметры которых лежат в диапазоне $[d_0 \div d_2]$, возникает положительная ошибка, т.к. значение табличного объема больше истинного значения объема сортимента.

Так как зависимость объема сортиментов от диаметра является квадратичной, то указанные выше ошибки не равны, т.е.

$$|\Delta Q_1| \neq |\Delta Q_2| . \qquad (3)$$

Следовательно, необходимо выбрать такое положение граничного диаметра d_0, чтобы

$$|\Delta Q_1| = |\Delta Q_2| . \qquad (4)$$

Иными словами, то, что не достает по объему при измерениях бревен, диаметры которых лежат в интервале $[d_1 \div d_0]$, необходимо "уравновесить" избытком объема, который имеется при измерении бревен в интервале $[d_0 \div d_2]$.

Условие компенсации (4) может быть выполнено, если рассматривать не однократное измерение, а некоторую совокупность измерений.

Пусть кривая плотности вероятности появления диаметров бревен имеет вид, представленный на рис.2. Тогда математическое ожидание истинного объема будет определяться выражением

$$Q_{\text{uct}} = k \int_{d_1}^{d_0} p(d_x) d_x^2 d(d_x) , \qquad (5)$$

где
$p(d_x)$ - вероятность появления диаметра dx в диапазоне $[d_1 \div d_0]$;
$d(d_x)$ - символ дифференцирования.
Величина k для сортиментов равна:

$$k = \frac{\pi}{4} l ,$$

где
l- длина сортимента.

В дальнейшем принимаем величину $k = 1$ (для упрощения), так как ниже будет показано, что данная величина существенного значения не имеет.

Математическое ожидание измеряемого (дискретного) объема Q зависит от вероятности появления диаметров в диапазоне $[d_1 \div d_0]$.

$$Q_{\text{uз m}} = d_1^2 \int_{d_1}^{d_0} p(d_x) d(d_x) . \qquad (6)$$

Таким образом, ошибка объема в интервале $[d_1 \div d_0]$ будет равна:

$$\Delta Q_{(-)} = Q\text{uct} - Q\text{uз m} = \int_{d_1}^{d_0} (d_x^2 - d_1^2) p(d_x) d(d_x) . \qquad (7)$$

Аналогично можно будет показать, что для измерений, которые производятся в интервале $[d_0 \div d_2]$, ошибка будет равна:

[1] *Автор - доцент кафедры технологии и оборудования лесного комплекса*

$$\Delta Q_{(+)} = \int_{d_0}^{d_2} (d_2^2 - dx^2) p(d_x) d(d_x) . \qquad (8)$$

Подставляя в условие компенсации (4) выражения (7) и (8), будем иметь

$$\int_{d_1}^{d_0} (d_x^2 - d_1^2) p(d_x) d(d_x) = \int_{d_0}^{d_2} (d_2^2 - d_x^2) p(d_x) d(d_x) . \qquad (9)$$

Для того, чтобы получить рекуррентное соотношение для вычисления значений d_0, необходимо аппроксимировать кривую плотности вероятности появления диаметров. Рассмотрим следующие варианты.

1. *Принята ступенчатая аппроксимация* (рис.2,Б).

Подставляя значения аппроксимированной кривой в уравнение (9), получим

$$\int_{d_1}^{d_0} (d_x^2 - d_1^2) p(d_1) d(d_x) = \int_{d_0}^{d_2} (d_2^2 - d_x^2) p(d_2) d(d_x) . \qquad (10)$$

После интегрирования и преобразований имеем

$$\left[\frac{p(d_1)+p(d_2)}{3}\right] d_0^3 - \left[d_1^2 p(d_1) + d_2^2 p(d_2)\right] d_0 + \frac{2}{3}\left[d_1^3 p(d_1) + d_2^3 p(d_2)\right] = 0$$

или

$$d_0^3 - p d_0 + q = 0 , \qquad (11)$$

где $p = \dfrac{3\left[d_1^2 p(d_1) + d_2^2 p(d_2)\right]}{p(d_1)+p(d_2)}$,

$$q = \frac{2\left[d_1^3 p(d_1) + d_2^3 p(d_2)\right]}{p(d_1)+p(d_2)} .$$

Неполное кубическое уравнение (11) имеет три действительных корня, так как дискриминант D<0 ("неприводимый" случай). Решение этого уравнения возможно лишь переходом к тригонометрическому представлению комплексных чисел.

2. *Принята линейная аппроксимация* (рис.2,б).

Подставляя значения аппроксимированной кривой в уравнение (9), получим:

$$\int_{d_1}^{d_0} (d_x^2 - d_1^2)[p(d_1) + k(d_x - d_1)] d(d_x) =$$

$$= \int_{d_0}^{d_2} (d_2^2 - d_x^2)[p(d_1) + k(d_x - d_2)] d(d_x)$$

где

$$k = \frac{p(d_2) - p(d_1)}{d_2 - d_1} .$$

После интегрирования и преобразований имеем

$$d_0^3 + a d_0^2 + b d_0 - c = 0 , \qquad (12)$$

где $a = \dfrac{3k}{p(d_1)}\left(d_2^2 - d_1^2\right)$,

$$b = \frac{3}{2p(d_1)}\left(d_2^2 - d_1^2\right)\left[p(d_1) + k d_1\right],$$

$$c = \frac{3}{2p(d_1)}\left[\frac{2}{3}p(d_1)\left(d_2^3 - d_1^3\right) + \frac{k}{4}\left(d_2^4 - d_1^2\right) + \frac{2k}{3}\left(d_2^4 - d_1 d_2^3\right)\right]$$

Полное кубическое уравнение (12) имеет три действительных корня, так как D<0.

Хотя уравнения (11) и (12) имеют решения, они неудобны для практического пользования.

Преобразуем уравнение (9) к виду

$$\int_{d_1}^{d_2} d_x p(d_x) d(d_x) = \int_{d_1}^{d_0} (d_1^2 p(d_x) d(d_x) + \int_{d_0}^{d_2} d_2^2 p(d_x) d(d_x). \qquad (13)$$

Левая часть этого выражения есть математическое ожидание объема в диапазоне измерения диаметров $\left[d_1 \div d_2\right]$. Аппроксимируем плотность вероятности диаметров на этом интервале линейной функцией вида

$$p(d_x) = p(d_1) + k(d_x - d_1) . \qquad (14)$$

Подставляя уравнение (14) в левую часть выражения (13) и интегрируя, получим (15):

$$\int_{d_1}^{d_2} d_x^2\left[p(d_1) + r(d_x - d_1)\right] d(d_x) = \qquad (15)$$

$$= \frac{d_2^3 - d_1^3}{3}\left[p(d_1) - k(d_1)\right] + \frac{k}{4}\left(d_2^4 - d_1^4\right)$$

Интегралы правой части уравнения (13) могут быть найдены на основе ступенчатой или линейной аппроксимации кривой распределения плотности вероятности диаметров.

В первом случае интегралы правой части уравнения (13) будут равны

$$\int_{d_1}^{d_0} d_1^2 p(d_1) d(d_x) + \int_{d_0}^{d_2} d_2^2 p(d_2) d(d_x) = \qquad (16)$$

$$= d_1^2 p(d_1)(d_0 - d_1) + d_2^2 p(d_2)(d_2 - d_0)$$

Подставляя в уравнение (13) найденные выражения (15) и (16) и решая его относительно d_0, получим

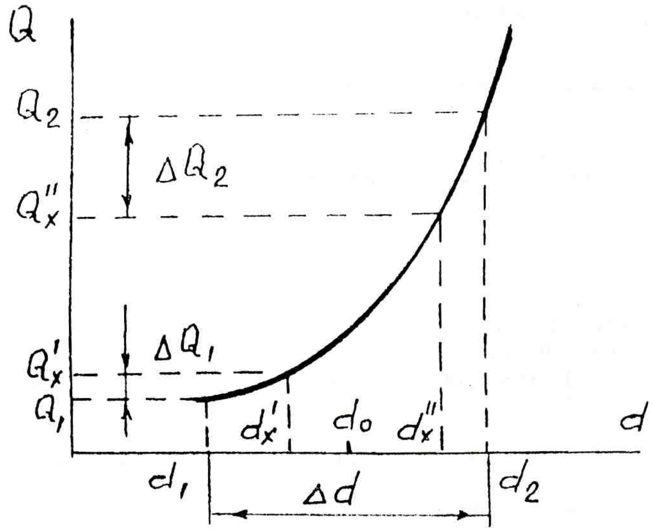

Рис. 1. Зависимость объема круглых лесоматериалов от диаметра

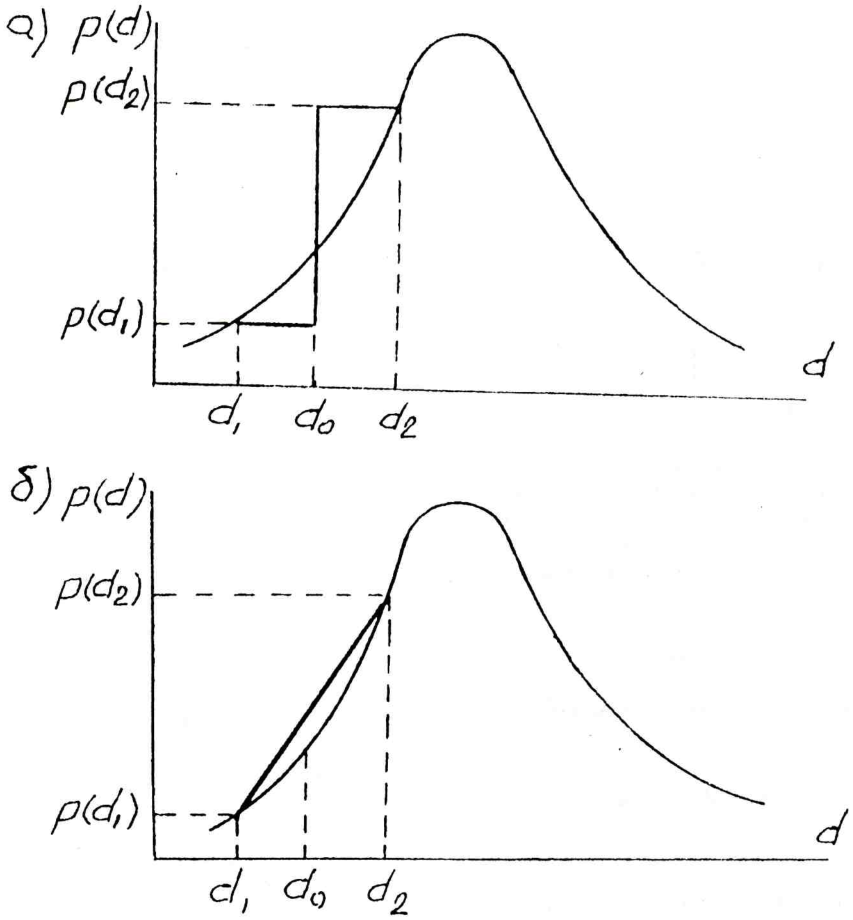

Рис. 2. Кривая плотности вероятности появления диаметров
а - ступенчатая аппроксимация;
б - линейная аппроксимация

$$d_0 = \frac{d_2^3\left[\frac{3p(d_2) - p(d_1)}{3} - k\left(\frac{d_2}{4} - \frac{d_1}{3}\right)\right] - d_1^3\left[\frac{2}{3}p(d_1) + \frac{k}{12}d_1\right]}{p(d_2)d_2^2 - p(d_1)d_1^2} \tag{17}$$

Во втором случае интегралы правой части уравнения (13) будут иметь вид:

$$\int_{d_1}^{d_0} d_1^2\left[p(d_1) + k(d_x - d_1)\right]d(d_x) + \int_{d_0}^{d_2} d_2^2\left[p(d_1) + k(d_x - d_1)\right]d(d_x) \tag{18}$$

После интегрирования выражения (18), подстановки его в уравнение (13) и соответствующих преобразований получим формулу для определения диаметра d_0 в виде квадратного уравнения

$$ab_0^2 + bd_0 + c = 0\,, \tag{19}$$

где

$$a = \frac{k}{4}\left(d_2^2 - d_1^2\right),$$

$$b = \left[p(d_1) - kd_1\right]\left(d_2^2 - d_1^2\right),$$

$$c = d_2^3\left[\frac{2k}{3}d_1 - \frac{2}{3}p(d_1) - \frac{k}{4}d_2\right] - d_1^3\left[\frac{5k}{12}d_1 - \frac{2}{3}p(d_1)\right].$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, решение уравнений (17) и (19) не представляет трудностей и они могут быть рекомендованы для практического применения.

Рассмотренный метод определения граничных диаметров d_0 может быть применен в системах автоматического учета объемов сортиментов для повышения их точности.