Методика оценки вероятности безотказной работы в системах управления в случае постепенных отказов

Питухин Е.А., Ледовский А.Д.[1]
Петрозаводский государственный университет, Балтийский государственный технический университет, Санкт-Петербург

Для определения вероятности безотказной работы (ВБР) по критерию постепенных (параметрических) отказов систем управления (СУ), представленных уравнением состояния, предлагается использовать модифицированное неравенство Чебышева. Вычисленные значения вероятности будут более завышены, чем по результатам статистического моделирования, в силу принятия допущения о равномерном распределении плотности вероятности исходных конструктивных параметров, но существенное сокращение времени вычислений позволяет использовать методику при управлении в реальном времени (on-line control) в качестве первого этапа.

Ключевые слова: *системы управления, качество работы, вероятность безотказной работы*

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании технических объектов как динамических систем управления (ДСУ) в качестве их математической модели предлагается использовать систему линейных дифференциальных уравнений (ЛДУ). Это оправдывается следующими обстоятельствами:

- Динамические системы управления функционируют в линейных (гладких) режимах в силу достаточной инерционности приводов.
- Аппарат ЛДУ удобен для описания ДСУ и задания конструктивных параметров и их допусков.
- Имеется возможность использования принципа суперпозиции для поиска решения у стохастических моделей.

При анализе систем ЛДУ с детерминированными (номинальными) значениями исходных параметров используют численно-аналитический повышенной точности метод решения, основанный на конструировании хронологической матрицы [1]. В дальнейшем этот алгоритм решения будет служить основой для прецезионных детерминированных вычислений, требуемых для оценки рассеивания выходных контролируемых величин.

При анализе систем ЛДУ со стохастическими значениями исходных параметров в качестве одного из показателей надежности используют вероятность безотказной работы (ВБР), которая определяется как произведение ВБР по критерию параметрических отказов на ВБР по критерию функциональных отказов.

[1] *Авторы, соответственно, аспирант и доцент*

Параметрические отказы определяются степенью согласованности качественных параметров работы системы (время окончания переходного процесса, перерегулирование, установившаяся ошибка и другие) по отношению к допустимому диапазону их изменения в техническом проекте. В определении вероятности возникновения параметрических отказов используется неравенство Чебышева, преобразованное Куриленко [2].

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим методику определения вероятности безотказной работы R простейшей ДСУ без учета вектора внешних воздействий, описываемой векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{X} = AX,$$

где

X- вектор динамических переменных системы;
A - матрица пространства состояний.

Для случайной матрицы A справедливо:

$$A = M[A] + \overset{\circ}{A},$$

где

$M[A]$ - среднее;

$\overset{\circ}{A}$ - центрированная случайная величина.

Идея вычисления ВБР основана на использовании неравенства Чебышева, дающего оценку для вероятности превышения центрированной случайной величиной некоторого значения ε:

$$P\left\{|\overset{0}{A}| \geq \varepsilon\right\} \leq \sigma_A^2/\varepsilon^2 \qquad \forall\, \varepsilon \in [0,\infty),$$

где

P - указанная вероятность;

σ_A^2 - дисперсия;

ε - диапазон изменения случайной величины.

Матрица (порядка s) может иметь некоторое число ненулевых элементов (конструктивных параметров) n, $n \leq s^2$.

Для равномерного распределения элементов матрицы, Куриленко [2] трансформировал неравенство Чебышева, применяя аддитивный критерий для этой цели:

$$A = \sum_{k=1}^{n} A_k,$$

где

A_k - матрицы с ненулевым k-м стохастическим элементом, все остальные ее элементы - нули.

С учетом правил комбинаторной логики неравенство записано как

$$\Pr\left\{|\overset{0}{A}| \le \varepsilon_\sigma\right\} \ge \left(1 - \frac{1}{n} \times \frac{\sigma_A^2}{\varepsilon_\sigma^2}\right)^n,$$

$$\forall\, \varepsilon_\sigma \in \left[\sigma_A; \infty\right)$$

где

Pr - вероятность попадания модуля центрированной величины $|\overset{0}{A}|$ в интервал ε_σ;

ε_σ - новый диапазон изменения случайной величины с нижней границей σ_A, которая назначается для обеспечения сходимости формулы.

Исходя из свойств матричной дисперсии [3] $\sigma_A^2 \ge \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2$, полученная оценка будет верна при допущении о равенстве дисперсий конструктивных параметров

$$\sigma_k^2 \approx \frac{1}{n}\sigma_A^2.$$

Симметрия функции плотности распределения $\overset{0}{A}$, в пределе стремящегося к нормальному, обеспечивается из центральной предельной теоремы, которая использовалась при изначальной постановке задачи. В итоге получаем выражение для многомерного нормального закона распределения, справедливого для больших n, поскольку в пределе:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n} \times \frac{\sigma_A^2}{\varepsilon_\sigma^2}\right)^n = e^{\left(-\frac{\sigma_A^2}{\varepsilon_\sigma^2}\right)},$$

в итоге получим:

$$\Pr\left\{|\overset{0}{A}| \le \varepsilon_\sigma\right\} \ge e^{\left(-\frac{\sigma_A^2}{\varepsilon_\sigma^2}\right)}.$$

Из экспериментальных исследований известно [4], что ВБР по критерию постепенных отказов меньше, чем по критерию внезапных. Это говорит о целесообразности учета данной вероятности при проектировании.

ПРИМЕР РАСЧЕТА

В качестве примера предлагается расчет элементарной системы управления (СУ) двигателем постоянного тока (ДПТ). На рис.1 приведена структурная схема ДПТ.

Принцип работы: человек-оператор воздействует на рукоятку управления моментом Md с пропорциональным коэффициентом k1, момент дважды интегрируется до воздействия Ad, который далее поступает на вход замкнутой следящей системы, k14=1 - единичная обратная связь (ОС). В качестве корректирующих звеньев в систему входят звенья ОС по скорости k10 и ОС по ускорению k11p, и звенья последовательной коррекции (ПК): числитель k4(T4p+1)(T3p+1) и знаменатель (T2p+1)(T4p+1), в данном случае ПК не участвует в управлении, т.е. T1=T2=T3=T4=0, k4=1. Сдвиг по фазе, к которому приводит использование обратной связи, компенсируется соответствующими инвариантными (ИВ) входами k13 и k12. До ПК сигнал усиливается на сумматоре k2 и после вычитания из него сигналов ОС и ИВ превращается в сигнал рассогласования Θ. Далее сигнал поступает на электронный усилитель k3, проходит через ПК и после согласующего устройства k5 попадает на сам ДПТ. Апериодическое звено k6/(T6p+1) учитывает общий коэффициент усиления двигателя k6 и инерционную постоянную T6. Присутствуют ОС по скорости k8 и ОС по сухому трению f7. Величина обратная моменту инерции ротора - k7 и понижающий редуктор с коэффициентом k9.

Выходная управляемая переменная - это угол поворота ротора Ao, который стремится достичь значения Ad.

Данные по значениям конструктивных параметров приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значения конструктивных параметров для структурной схемы ДПТ

k1	0.4
k2	6.0
k3	350.0
k4	1.0
k5	1.5
k6	0.000002
k7	400000000.0
k8	0.06
k9	0.0005
k10	0.1
k11	0.02
k12	0.02
k13	0.1
k14	1
f7	0.0000001
T1	0.0
T2	0.0
T3	0.0
T4	0.0
T6	0.02

По структурной схеме ДПТ была составлена математическая модель в виде системы линейных дифференциальных уравнений (ЛДУ), для вычисления элементов матрицы которой использовались значения конструктивных параметров из таблицы 1. Данные параметры считаются номинальными, и им соответствует расчетная матрица A(0%). Еще две матрицы A(+10%) и A(-10%) были получены из вычислений по соответствующим 10-процентным

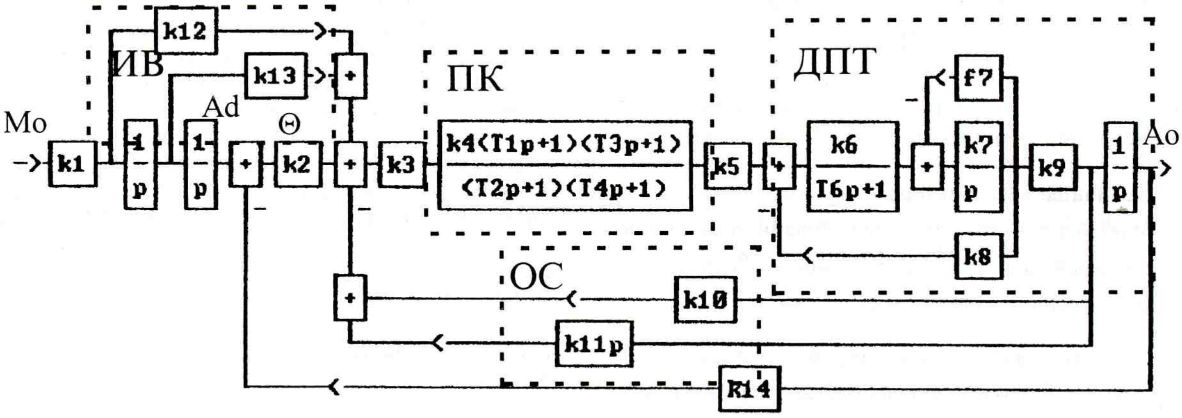

Рис.1. Структурная схема ДПТ

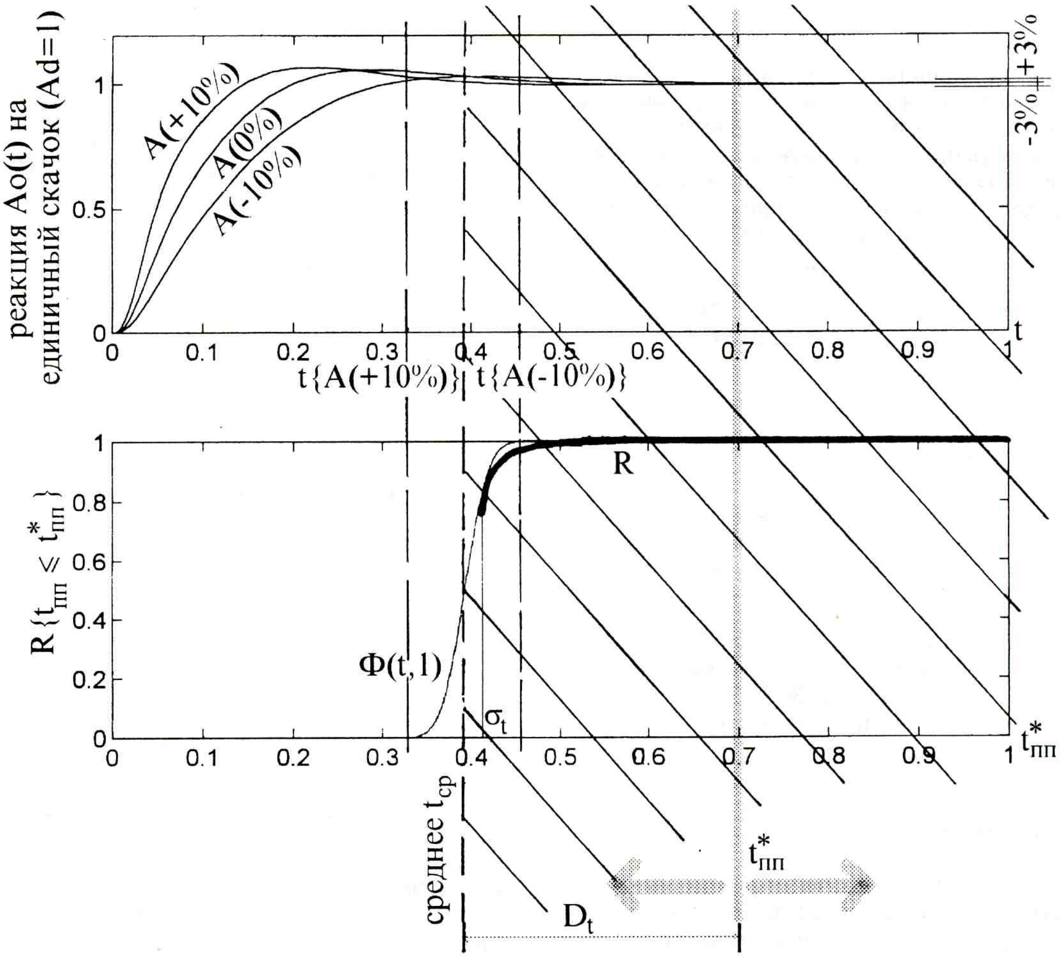

Рис.2. Реакция системы Ao(t) на единичный скачок (вверху) и оценка вероятности безотказной работы R в зависимости от заданного в техническом задании времени окончания переходного процесса $t^*_{пп}$ (внизу)

вариациям конструктивных параметров (кроме k14-главной отрицательной ОС). Решения системы ЛДУ в графическом виде (переходные процессы) для выходной координаты Ad представлены на верхней части рис.2.

Продемонстрируем идею оценки ВБР для некоторого интересующего нас параметра. Пусть это будет время окончания переходного процесса $t^*_{п\,п}$, полученное в задании на проектирование. Время $t^*_{п\,п}$ обычно определяется как время входа некоторой динамической переменной в 3% или 5% зону относительно установившегося состояния этой переменной.

В этом случае вопрос можно сформулировать следующим образом: *С какой вероятностью R, при 10% разбросе конструктивных параметров в схеме ДПТ, будет обеспечиваться попадание регулируемой переменной Ao (угла поворота ротора двигателя) в 3% зону к некоторому моменту времени* $t^*_{п\,п}$*?*

Вследствие линейных свойств движения данного типа ДСУ принимается допущение [5], что поток всевозможных значений Ad(t), обусловленных стохастическими вариациями конструктивных параметров, лежит в пределах от одного крайнего выброса одновременно всех параметров в одну сторону - в «плюс», что соответствует матрице A(+10%), и в «минус», что соответствует матрице A(-10%).

При пересечении этих двух ограничивающих кривых с линиями 3% входа в зону установившегося режима получаем два значения времени, соответствующих событиям: t{A(+10%)} и t{A(-10%)}.
Для стремящегося к гауссову распределению Ao, вычислим среднее для времени

$$t_{ср} = \frac{t\{A(+10\%)\} + t\{A(-10\%)\}}{2}.$$

Оценку дисперсии определим исходя из правила 3σ, как

$$\sigma_t^2 = \frac{(t\{A(+10\%)\} - t\{A(-10\%)\})^2}{36}.$$

Введем понятие *функционального запаса* D_t - что соответствует временному промежутку между реальным временем окончания переходного процесса $t_{п\,п}$, определенным $t_{ср}$ и σ_t^2, и заданным в техническом задании временем $t^*_{п\,п}$. Для случайной величины - реального времени переходного процесса $t_{п\,п}$ диапазоном изменения ε_σ будет являться D_t, т.е. тот промежуток, находясь в котором реальное время переходного процесса $t_{п\,п}$ будет всегда меньше времени $t^*_{пп}$ заданного:

$$\begin{cases} D_t = t^*_{п\,п} - t_{ср}; & D > 0 \\ D_t = 0; & D \le 0 \end{cases}$$

Исходя из оценочного неравенства Чебышева-Куриленко, вероятность попадания модуля центрированной случайной величины в интервал будет определяться как

$$\Pr\left\{|\overset{0}{t}_{п\,п}| \le D_t\right\} \ge e^{-\frac{\sigma_t^2}{D_t^2}}.$$

Вероятность безотказной работы R есть непревышение случайной величиной $t_{п\,п}$ заданного времени $t^*_{п\,п}$:

$$R\left\{t_{пп} \le t^*_{пп}\right\} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\Pr.$$

Очевидно, что выделенный на нижней части рис.2. жирной линией график **R** значений ВБР в зависимости от множества значений $t_{п\,п}$ при фиксированных значениях $t_{ср}$ и σ_t^2 отражает оценку ВБР для конкретной системы с определенными конструктивными параметрами. С помощью данного графика можно, например, дать рекомендацию по подбору улучшенного значения $t^*_{пп}$, которое будет реально соотноситься с номиналами и допусками конструктивных параметров. Заштрихованная часть графика показывает возможный диапазон местонахождения заданного времени переходного процесса $t^*_{п\,п}$, которое будет удовлетворять работе СУ ДПТ с вероятностью, приведенной на графике. В данном случае приведенный график позволяет решить обратную задачу проектирования - определить вероятность безотказной работы для уже обладающей конкретными конструктивными параметрами или же существующей системы исходя из заданного времени $t^*_{п\,п}$.

Сравним подход к определению ВБР с использованием неравенства Чебышева с формулой для нормального закона распределения.

Функция ошибок для нормированной центрированной случайной величины записывается как

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

Функция распределения для нормальной величины связана с ней следующим образом:

$$\Phi(z) = \tfrac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

Но это одномерное распределение, мы же, исходя из условия задачи, имеем дело с многомерным нормальным распределением. Оценим величину

$$\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right)\right)^n.$$

Разложим ее в ряд в окрестности 0 и построим график $\Phi(z,n)$ (рис.3). Получаем поверхность, сечение вдоль оси z которой, с увеличением числа n, стремится увеличить крутизну наклона касательной к кривой вероятности.

На рис.2. для сравнения с предлагаемой методикой расчета, отраженной на графике **R,** представлена кривая нормального одномерного распределения $\Phi(z,l)$. Максимальное относительное отклонение двух кривых на сравнительно небольшом участке не превышает 6%. Из рис.3. видно, что с увеличением числа учитываемых случайных параметров функция $\Phi(z,n)$ сдвигается вправо, следовательно, оценка по неравенству Чебышева является более сильной для многомерного распределения, близкого к нормальному.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод использует допущение о равномерном распределении элементов матрицы A как о наиболее жестком из-за ограничения полей дисперсии. Следовательно, параметрическая ВБР в ряде случаев будет более заниженной, чем, например, при использовании более достоверных статистических методов (Монте-Карло).

Очевидно, что использование модифицированного неравенства Чебышева является более точным для оценки случайных величин с многомерным законом распределения, чем оценка по классическому одномерному нормальному закону распределения, но менее точным, чем статистическое моделирование.

Однако применение предварительных оценок при глобальных исследованиях с большим количеством элементов и допусков (например, электронные схемы, блоки управления и т.д.) будет иметь значительный временной и экономический выигрыш вследствие уменьшения времени исследований и тестирования пробных партий продукции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ройтенберг Я.Н Автоматическое управление: Учеб. пособие для вузов. 3-е изд. перераб. и доп. М.: Наука. 1992. 576 с.

2. Куриленко А.М. Свойства линейных динамических систем со случайными параметрами // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. N 4. 1984. С. 183 -191.

3. Эльясберг П.Е. Измерительная информация: сколько ее нужно? Как ее обрабатывать. М.: Наука, 1983. 208 с.

4. Куриленко А.М., Ледовский А.Д. Качество судовых динамических систем управления. СПб.: Судостроение, 1994. 176 с.: ил.

5. Гнеденко Б.В., Беляев В.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 1969. 524 с.

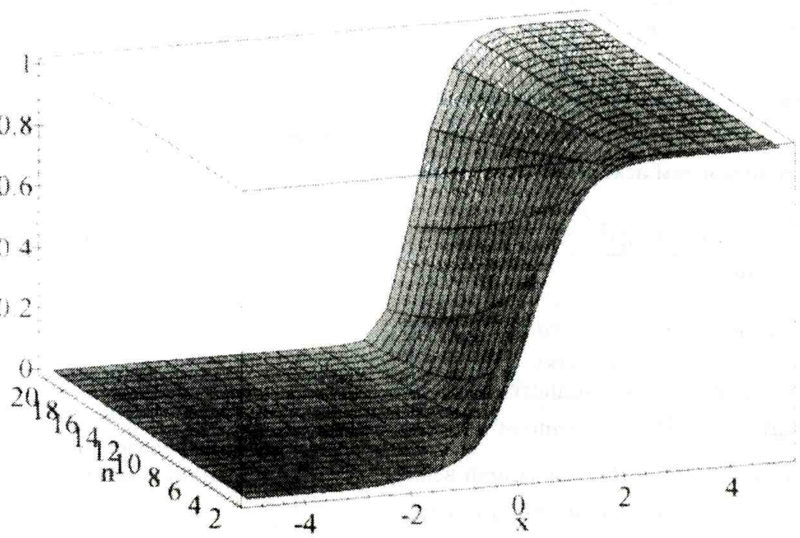

Рис.3. Оценка многомерного нормального распределения $\Phi(z,n)$ для случайной центрированной нормированной величины x и числа случайных составляющих n